

Analyse et Équations aux Dérivées Partielles

Thomas Alazard

Thomas Alazard
CNRS et École Normale Supérieure de Paris-Saclay
<http://talazard.perso.math.cnrs.fr/>

Préface

Ce livre propose une **introduction** aux domaines de l'Analyse mathématique qui sont liés à l'étude des **équations aux dérivées partielles**. Il commence par trois parties portant sur l'**analyse fonctionnelle**, l'**analyse harmonique** et l'**analyse microlocale**. La dernière partie de ce livre, plus difficile, concerne la théorie moderne des **équations aux dérivées partielles**. Il s'agit d'un domaine très vaste et j'ai choisi de donner des démonstrations complètes d'une sélection de théorèmes majeurs. Nous étudierons la résolution du problème de Calderón, le théorème de propagation des singularités d'Hörmander, le grand théorème de De Giorgi et une inégalité de Strichartz–Bourgain. Nous étudierons également les équations aux dérivées partielles elliptiques, hyperboliques ou dispersives. Les problèmes donnés dans la dernière partie complètent cette présentation et proposent de démontrer de nombreux résultats célèbres (théorème de Nash pour les équations paraboliques, condition d'Hörmander sur les sommes de carrés de champs de vecteurs, construction des mesures microlocales de défaut de Gérard et Tartar...).

J'ai essayé de proposer un enseignement exigeant mais accessible à un(e) étudiant(e) de Master motivé(e) (niveau M1 pour l'Analyse fonctionnelle et l'Analyse harmonique, et niveau M2 pour l'Analyse microlocale et la théorie des équations aux dérivées partielles).

Au niveau pédagogique, la principale originalité de ce livre est qu'il correspond fidèlement à un enseignement donné devant des étudiants. Ces notes n'ont pas été pensées comme un complément du cours. Au contraire, elles retranscrivent mot pour mot ce qui a été *écrit au tableau* lors de plusieurs cours différents, à l'ENS Paris et à l'ENS Cachan, pour un volume horaire total d'à peu près 100 heures de cours. Absolument toutes les démonstrations qui figurent dans ce livre ont été écrites au tableau *in extenso*. Ces démonstrations ont été choisies en partie pour leurs vertus pédagogiques, en essayant de faire intervenir des notions présentées dans d'autres chapitres par exemple. Certaines redondances sont voulues, car je pense qu'elles peuvent aider les étudiants.

Remerciements. Je remercie très chaleureusement Cécile Huneau, Irène Waldspurger et Isabelle Tristani, qui ont donné des Travaux Dirigés sur la partie EDP de ce cours, Arthur Leclaire, Ayman Rimah et Rémi Tesson qui ont donné des Travaux Dirigés sur la partie Analyse Fonctionnelle.

Table des matières

partie 1. Analyse fonctionnelle

Chapitre 1. Topologie générale	2
§1. Espaces topologiques	3
§2. Séparabilité, compacité et complétude	8
§3. Théorème de Baire	14
§4. Exercices	17
Chapitre 2. Espaces vectoriels topologiques	19
§1. Espaces vectoriels normés	20
§2. Parties convexes, bornées, équilibrées	23
§3. Espaces de dimension finie	26
§4. Semi-normes	30
§5. Espaces de Banach	35
§6. L'espace des fonctions continues	40
§7. Exercices	49
Chapitre 3. Théorèmes de point fixe	51
§1. Rappels de calcul différentiel	51
§2. Théorème du point fixe de Banach	52
§3. Théorèmes d'inversion locale	53

§4. Théorème de Cauchy-Lipschitz	56
§5. Théorème du point fixe de Brouwer	57
§6. Théorème de l'invariance du domaine	61
§7. Théorème de Nash	65
§8. Exercices	72
Chapitre 4. Analyse Hilbertienne, dualité et convexité	75
§1. Introduction aux espaces de Hilbert	76
§2. Bases hilbertiennes	82
§3. Théorème de Hahn-Banach	84
§4. Espaces de Lebesgue	90
§5. Convergence faible, convergence faible étoile	92
§6. Théorème de Banach-Alaoglu	97
§7. Exercices	99
partie 2. Analyse Harmonique	
Chapitre 5. Séries de Fourier	102
§1. Introduction	102
§2. Fonctions de carrés intégrables	104
§3. Convergence simple et convergence uniforme	107
§4. Applications de la formule de Plancherel	112
§5. Exercices	113
Chapitre 6. Transformée de Fourier	115
§1. Introduction	115
§2. Classe de Schwartz	117
§3. Distributions tempérées	123
§4. Décomposition de Littlewood-Paley	127
§5. Exercices	133
Chapitre 7. Fonctions harmoniques	135
§1. Propriété de la moyenne	135
§2. Solution fondamentale du Laplacien	138

§3. Fonctions harmoniques conjuguées	142
§4. Régularité des fonctions harmoniques	145
§5. Exercices	148
Chapitre 8. Inégalités dans les espaces de Lebesgue, produit de convolution et fonctions à support compact	151
§1. Inégalités de Hölder, Minkowski et Hardy	151
§2. Fonction de distribution	155
§3. Définition du produit de convolution	156
§4. Fonctions régulières à support compact	159
§5. Approximations de l'identité	163
§6. Exercices	165
Chapitre 9. Fonction maximale et applications	168
§1. Fonction de distribution	168
§2. Fonction maximale d'Hardy-Littlewood	171
§3. Convergence simple d'une approximation de l'identité	175
§4. Inégalité d'Hardy-Littlewood-Sobolev	179
§5. Exercices	181
Chapitre 10. Espaces de Sobolev	183
§1. Dérivation au sens faible	183
§2. Inégalités de Poincaré	188
§3. Espaces de Sobolev définis sur un ouvert quelconque	191
§4. Injections de Sobolev	198
§5. Injections compactes	199
§6. Traces et problème de Dirichlet inhomogène	203
§7. Analyse de Fourier et espaces de Sobolev	204
§8. Exercices	211
partie 3. Analyse microlocale	
Chapitre 11. Opérateurs pseudo-différentiels	216
§1. Symboles	217

§2. Continuité des opérateurs pseudo-différentiels	220
§3. Exercices	223
Chapitre 12. Calcul symbolique	226
§1. Introduction à l'analyse microlocale	226
§2. Introduction au calcul symbolique	228
§3. Intégrales oscillantes	233
§4. Adjoint et composition	239
§5. Applications du calcul symbolique	250
Chapitre 13. Equations hyperboliques	254
§1. Équations de transport	254
§2. Equations hyperboliques pseudo-différentielles	257
§3. Régularisation de l'équation	262
Chapitre 14. Singularités microlocales	267
§1. Propriétés locales	267
§2. Front d'onde	270
§3. Théorème de propagation des singularités	274
§4. Calcul paradifférentiel	277
partie 4. Analyse des équations aux dérivées partielles	
Chapitre 15. Le problème de Calderón	280
§1. Introduction	280
§2. Densité des produits de fonctions harmoniques	281
§3. Equations à coefficients variables	283
§4. Théorème de Sylvester-Uhlmann	291
Chapitre 16. Théorème de De Giorgi	293
§1. Introduction	293
§2. Sous-solutions et transformations non linéaires	296
§3. Itérations de Moser	301
§4. Inégalité d'Harnack	304

§5. Régularité Hölderienne	307
Chapitre 17. Théorème de Schauder	311
§1. Moyennes locales et équations elliptiques	311
§2. Moyennes locales et espaces de Hölder	313
§3. Théorème de Campanato	315
§4. Théorème de Schauder	317
§5. Régularité H^2	324
§6. Régularité des surfaces minimales	325
Chapitre 18. Estimations dispersives	329
§1. L'équation de Schrödinger	329
§2. Estimée de Strichartz-Bourgain pour KdV	334
§3. Exercices : Lemme de Van der Corput et applications	339
partie 5. Problèmes et solutions des exercices	
Chapitre 19. Problèmes	343
§A. Le lemme div-curl de Murat et Tartar	343
§B. Étude du pendule de Kapitsa par la convergence faible	345
§C. Inégalité d'interpolation de Riesz–Thorin	346
§D. Lemme de Friedrichs	349
§E. Continuité sur les espaces de Hölder	349
§F. Effet régularisant pour Schrödinger et Airy	352
§G. Sommes de carrés de champs de vecteurs	354
§H. Mesures microlocales de défaut	359
§I. Théorème de Nash	362
Chapitre 20. Solutions	365
partie 6. Bibliographie	
Analyse fonctionnelle	382
Théorèmes de Brouwer	382
Analyse harmonique	383

Analyse microlocale	383
Problèmes elliptiques	384
Equations dispersives	385
Problèmes inverses	385