

Analyse et Équations aux Dérivées Partielles

Thomas Alazard

Janvier 2017

Thomas Alazard
CNRS et École Normale Supérieure de Paris-Saclay
<http://talazard.perso.math.cnrs.fr/>

Résumé

Ce cours est une **introduction** aux domaines de l'Analyse mathématique qui sont liés à l'étude des **équations aux dérivées partielles**. Il commence par trois parties portant sur l'**analyse fonctionnelle**, l'**analyse harmonique** et l'**analyse microlocale**. Une fois que nous aurons étudié ces théories, nous verrons comment les utiliser dans la deuxième partie du cours. Notre but sera alors de donner des démonstrations complètes de plusieurs théorèmes majeurs dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous étudierons la résolution du problème de Calderón, le théorème de propagation des singularités d'Hörmander, le grand théorème de De Giorgi et une inégalité de Strichartz–Bourgain.

Nous étudierons également les équations aux dérivées partielles elliptiques, hyperboliques ou dispersives. Les problèmes donnés dans la dernière partie complètent cette présentation et proposent de démontrer de nombreux résultats fondamentaux (théorème de Nash pour les équations paraboliques, condition d'Hörmander sur les sommes de carrés de champs de vecteurs, construction des mesures microlocales de défaut de Gérard et Tartar...).

J'ai essayé de proposer un enseignement exigeant mais accessible à un étudiant motivé. Certains chapitres abordent des notions subtiles et il ne faudra pas s'inquiéter si certaines démonstrations sont difficiles à suivre en première lecture. Celles-ci seront toujours données en détail par souci d'être complet.

Les thèmes abordés et les démonstrations ont été choisis en partie pour leurs vertus pédagogiques, en essayant de faire intervenir des notions présentées dans d'autres chapitres par exemple. De même, certaines redondances sont voulues, car je pense qu'elles peuvent aider les étudiants.

La principale originalité de ces notes est qu'elles correspondent fidèlement à un enseignement donné devant des étudiants. Elles n'ont pas été pensées comme un complément du cours. Au contraire, elles retranscrivent presque mot pour mot à ce qui a été *écrit au tableau* lors de plusieurs cours différents, à l'ENS Paris et à l'ENS Cachan, pour un volume horaire total d'à peu près 80 heures de cours.

Absolument toutes les démonstrations qui figurent dans ces notes ont été écrites au tableau *in extenso*.

Les problèmes ont tous été posés en examen. Certains sont des problèmes d'applications du cours. Plusieurs problèmes sont difficiles voir très difficiles même pour des étudiants affûtés (auquel cas je le mentionne au début du sujet) et il faudrait compter jusqu'à une dizaine d'heures pour les finir.

Ce cours doit énormément (et emprunte beaucoup) à de nombreux livres ou photocopiés de cours. La liste des documents que j'ai utilisés est donnée dans la dernière partie.

Remerciements

Je remercie très chaleureusement Cécile Huneau, Irène Waldspurger et Isabelle Tristani, qui ont donné des Travaux Dirigés sur la partie EDP de ce cours, et Arthur Leclaire qui a donné des Travaux Dirigés sur la partie Analyse Fonctionnelle. Je les remercie pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur le contenu du cours ainsi que pour leur aide précieuse dans la préparation des problèmes.

Table des matières

I	Analyse fonctionnelle	11
1	Topologie générale	13
1.1	Espaces topologiques	13
1.2	Séparabilité, compacité et complétude	18
1.3	Espaces vectoriels topologiques	24
1.4	Première illustration : topologie des espaces vectoriels de dimension finie	26
1.5	Seconde illustration : théorème d'Arzela–Ascoli	29
1.6	Troisième illustration : théorème du point fixe	30
1.7	Quatrième illustration : inversion locale et Nash-Moser	32
2	Théorèmes de Baire et de Banach	41
2.1	Théorème de Baire	41
2.2	Théorème de Banach-Steinhaus	44
2.3	Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé	45
2.4	Exemples d'applications	47
3	Analyse Hilbertienne	49
3.1	Introduction aux espaces de Hilbert	49
3.2	Bases hilbertiennes	53
4	Dualité (à rédiger)	57
4.1	Théorème de Hahn-Banach (à rédiger)	57
4.2	Topologies faibles	58
4.3	Exemple : le cas des espaces de Lebesgue	60

4.4	Convergence faible et convergence faible étoile	61
4.5	Théorème de Banach-Alaoglu (cas séparable)	64
4.6	Application à l'optimisation convexe	65
II	Analyse Harmonique	67
5	Séries de Fourier et transformée de Fourier	69
5.1	Séries de Fourier	69
5.2	Transformée de Fourier	73
5.3	Distributions tempérées	79
5.4	Décomposition de Littlewood-Paley	82
6	Espaces de Sobolev	89
6.1	Dérivation au sens faible et espaces de Sobolev	89
6.2	Inégalités de Poincaré	91
6.3	Analyse de Fourier et espaces de Sobolev	95
6.4	Espaces de Sobolev définis sur un ouvert quelconque	101
6.5	Injections compactes	106
6.6	Traces et problème de Dirichlet inhomogène	110
7	Fonctions harmoniques	111
7.1	Propriété de la moyenne	111
7.2	Solution fondamentale du Laplacien	113
8	Fonction maximale et applications	119
8.1	Fonction de distribution	119
8.2	Fonction maximale d'Hardy-Littlewood	122
8.3	Approximations de l'identité	125
8.4	Inégalité d'Hardy-Littlewood-Sobolev	129
8.5	Injections de Sobolev	130

III	Analyse microlocale	133
9	Opérateurs pseudo-différentiels	135
9.1	Opérateurs pseudo-différentiels	135
9.2	Continuité des opérateurs pseudo-différentiels	138
9.3	Opérateurs semi-classiques	141
10	Calcul symbolique	143
10.1	Introduction à l'analyse microlocale	143
10.2	Introduction au calcul symbolique	145
10.3	Intégrales oscillantes	149
10.4	Adjoint et composition	155
10.5	Applications du calcul symbolique	164
11	Equations hyperboliques	169
11.1	Équations de transport	169
11.2	Equations hyperboliques pseudo-différentielles	172
11.3	Régularisation de l'équation	177
12	Singularités microlocales	181
12.1	Propriétés locales	181
12.2	Front d'onde	183
12.3	Théorème de propagation des singularités	187
12.4	Calcul paradifférentiel	190
IV	Analyse des équations aux dérivées partielles	193
13	Le problème de Calderón	195
13.1	Introduction	195
13.2	Densité des produits de fonctions harmoniques	196
13.3	Equations à coefficients variables	197
13.4	Théorème de Sylvester-Uhlmann	205

14 Théorème de De Giorgi	207
14.1 Introduction	207
14.2 Sous-solutions et transformations non linéaires	209
14.3 Itérations de Moser	213
14.4 Inégalité d'Harnack	216
14.5 Régularité Hölderienne	218
15 Théorème de Schauder	223
15.1 Moyennes locales et équations elliptiques	223
15.2 Moyennes locales et espaces de Hölder	225
15.3 Théorème de Campanato	227
15.4 Théorème de Schauder	229
15.5 Régularité H^2	235
15.6 Régularité des surfaces minimales	236
16 Estimations dispersives	241
16.1 L'équation de Schrödinger	241
16.2 Estimée de Strichartz-Bourgain pour KdV	246
V Problèmes	251
17 Problèmes d'Analyse fonctionnelle	253
17.1 Frames et suites de Bessel	253
17.2 Le lemme div-curl de Murat et Tartar	254
17.3 Étude du pendule de Kapitsa par la convergence faible	256
18 Problèmes sur les espaces de Sobolev	259
18.1 Injections de Sobolev	259
18.2 Le problème de Dirichlet dans un demi-espace	261
19 Problèmes d'Analyse harmonique	265
19.1 Inégalité d'interpolation de Riesz–Thorin	265

19.2 Lemme de Van der Corput et applications	267
20 Problèmes sur la continuité des opérateurs pseudo-différentiels	275
20.1 Continuité sur les espaces de Hölder	275
20.2 Continuité sur les espaces de Sobolev uniformément locaux	278
21 Problèmes sur les applications du calcul symbolique	283
21.1 Factorisation d'une équation elliptique	283
21.2 Régularité parabolique	285
21.3 Effet régularisant pour Schrödinger et d'Airy	286
21.4 Sommes de carrés de champs de vecteurs	288
21.5 Mesures microlocales de défaut	293
22 Problèmes sur la théorie de De Giorgi-Nash-Moser	297
22.1 Théorème de Nash	297
22.2 Fonctions propres du Laplacien	299
VI Bibliographie	301

Première partie

Analyse fonctionnelle

Chapitre 1

Topologie générale

Pour que ce cours soit le plus auto-contenu possible, nous commençons par introduire les principales notions de topologie. Ce chapitre est rédigé sous une forme assez condensée : nous nous bornerons à introduire les définitions et à démontrer les résultats qui n'ont pas déjà été démontrés dans un cours d'introduction à la topologie. On donnera très peu d'exemples mais on développera quatre illustrations en détail à la fin de ce chapitre.

1.1 Espaces topologiques

Soit X un ensemble non vide. Nous noterons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X .

Une *topologie* sur X est une collection \mathcal{T} de parties de X telle que

- (i) \mathcal{T} contient l'ensemble vide et l'ensemble X ,
- (ii) toute union d'éléments de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} ,
- (iii) toute intersection finie d'éléments de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .

On dit simplement que \mathcal{T} est stable par union arbitraire et par intersection finie. Le couple (X, \mathcal{T}) est appelé *espace topologique*. Par abus de notations, on note en général X le couple (X, \mathcal{T}) . Dans ce chapitre, et uniquement dans ce chapitre, on utilisera la notation $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$ pour distinguer l'ensemble X de l'espace topologique (X, \mathcal{T}) .

Par définition, les éléments de \mathcal{T} sont les *ouverts* de l'espace topologique \mathcal{X} . Tout complémentaire d'un ensemble ouvert est dit *fermé*. Il suit des propriétés ci-dessus que toute intersection et toute réunion finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé. De même l'ensemble vide et l'ensemble X sont des fermés.

Chaque ensemble X non vide possède au moins deux topologies triviales : la topologie $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ (appelée topologie grossière) et la topologie $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$ (appelée topologie

discrète). Etant donné deux topologies \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sur un même ensemble X , nous dirons que \mathcal{T}_2 est plus fine que \mathcal{T}_1 si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Une topologie plus fine contient donc, par définition, davantage d'ensembles d'ouverts.

Soit $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$ un espace topologique et E un sous-ensemble de X . La topologie induite par \mathcal{T} sur E est

$$\mathcal{T}_E := \{U \cap E \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Pour un sous-ensemble A de X , l'*intérieur* de A est par définition la réunion de tous les ouverts de \mathcal{T} contenus dans A , cet ensemble est noté en général A° . La *fermeture* de A , aussi appelée *adhérence* de A , est l'intersection de tous les fermés contenant A , noté \overline{A} . Il suit directement de ces définitions que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A alors que la fermeture de A est le plus petit fermé contenant A . Un *voisinage* de A est un ensemble quelconque qui contient un ouvert qui contient A , un voisinage d'un élément x de X est par définition un voisinage de $\{x\}$. La *frontière* de A , aussi appelé le *bord* de A , est l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Notons que ∂A est un ensemble fermé car c'est l'intersection de deux ensemble fermé : \overline{A} et le complémentaire de A° .

Un sous-ensemble A de X est dit *dense* dès que sa fermeture est l'ensemble X lui-même, alors qu'il est dit *nulle part dense* si $(\overline{A})^\circ$ est l'ensemble vide. S'il existe un sous-ensemble de X qui est dénombrable et dense on dira que la topologie est *séparable*. Soit A un sous-ensemble de X et x un point de X , x est dit *point d'accumulation* de A si $A \cap (U \setminus \{x\})$ est non-vide pour tout voisinage U de x . Il suit que la fermeture d'un ensemble A est la réunion de A et de ses points d'accumulation. Aussi, A est fermé si et seulement s'il contient l'ensemble de ses points d'accumulation.

Si \mathcal{T} est une topologie sur X et x est un point de X , une *base de voisinages ouverts* de x pour \mathcal{T} est une collection \mathcal{B} d'ouverts de \mathcal{X} , telle que tout $U \in \mathcal{B}$ contient x et telle que tout voisinage V de x contient un élément de \mathcal{B} . Une *base d'ouverts* de \mathcal{T} est une collection d'ouverts qui contient une base de voisinages ouverts de tout point de X . On montre, et cela de façon directe, qu'une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est une base d'ouverts de \mathcal{T} si et seulement si tout ouvert de \mathcal{T} est réunion d'éléments de \mathcal{B} . Aussi la donnée d'une base d'ouverts d'une topologie définit entièrement la topologie.

La notion de topologie permet de définir la continuité des applications. C'est une notion locale comme globale. Soit (X, \mathcal{T}_X) et (Y, \mathcal{T}_Y) deux espaces topologiques, $f: X \rightarrow Y$ une application et x un point de X . L'application f est *continue au point x* si $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x pour tout voisinage V de $f(x)$. On dit que f est *continue* sur X si $f^{-1}(V)$ appartient à \mathcal{T}_X pour tout $V \in \mathcal{T}_Y$. On note $C(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ l'ensemble des fonctions $f: X \rightarrow Y$ qui sont continues. En fait, par abus, on notera toujours cet ensemble $C(X; Y)$ (les topologies sous-jacentes étant en général clairement identifiées par le contexte).

On démontre facilement les énoncés suivants :

- une fonction est continue si et seulement si la préimage d'un fermé est fermée ;
- une fonction est continue sur X si et seulement si elle est continue en tout point ;
- la composée de deux applications continues est continue.

Considérons une bijection $f: X \rightarrow Y$. On dit que c'est un *homéomorphisme* si f et f^{-1} sont continues. On dit que deux espaces topologiques sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme entre eux.

Espace métrique

Une *distance* sur un ensemble X est une application $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ qui vérifie les trois hypothèses suivantes : pour tout x, y, z dans X ,

- (i) (séparation) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- (ii) (symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iii) (inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (X, d) est un *espace métrique*. Etant donné un point x dans X et un réel strictement positif r , on appelle *boule ouverte* de centre x et de rayon r l'ensemble

$$B(x, r) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \}.$$

Par définition, la *boule fermée* de centre x et de rayon r est

$$B_f(x, r) := \{ y \in X \mid d(x, y) \leq r \}.$$

Attention : ce n'est pas nécessairement l'adhérence de la boule ouverte de mêmes centre et rayon (on peut très bien avoir $B_f(x, r) \neq \overline{B(x, r)}$).

La collection notée \mathcal{T}_d des sous-ensembles U de X vérifiant

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \mid B(x, r) \subset U$$

est une topologie sur X , appelée topologie induite par la distance d . On montre que l'ensemble des boules ouvertes est une base d'ouverts. De façon générale on dira qu'un espace topologique $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$ est *métrisable* lorsqu'il existe une distance d sur X telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ (c'est à dire lorsqu'il existe une distance sur X tel que tout ouvert de \mathcal{T} peut s'écrire comme réunion de boules ouvertes pour cette distance).

Considérons deux espaces métriques (X, d) et (Y, ρ) ainsi qu'un élément x de X . Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue au point x si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall y \in X, \quad d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Espace normé

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une application ϱ de E dans $[0, +\infty[$ est une *semi-norme* si elle vérifie, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(x, y) \in E^2$,

$$(i) \text{ (homogénéité) } \varrho(\lambda x) = |\lambda| \varrho(x),$$

$$(ii) \text{ (inégalité triangulaire) } \varrho(x + y) \leq \varrho(x) + \varrho(y).$$

Une semi-norme est une *norme* si de plus $\varrho(x) = 0$ implique $x = 0$ (remarquons que la propriété d'homogénéité implique que $\varrho(0) = 0$).

Les normes se notent habituellement $\|\cdot\|$, un couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé *espace vectoriel normé*. L'application, notée d , définie sur $E \times E$ par $d(x, y) = \|x - y\|$ est alors une distance sur E .

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont *équivalentes* s'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que pour tout $x \in E$,

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $T: E \rightarrow F$ une application linéaire. L'application T est *bornée* sur un voisinage V de l'origine si

$$\sup_{x \in V} \|T(x)\|_F < +\infty.$$

On dira que T est *bornée* si

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F < +\infty.$$

Les applications linéaires continues jouent un rôle fondamental, aussi on donne plusieurs critères simples pour les caractériser.

Proposition 1.1. *Il est équivalent pour une application linéaire d'être continue, continue en 0, bornée sur un voisinage de l'origine ou encore bornée.*

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F . C'est un espace vectoriel. On définit une norme sur cet espace vectoriel en posant

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Si F est le corps \mathbb{K} muni de la topologie induite par le module, alors on note simplement $E' = \mathcal{L}(E, F)$ et on dit que E' est le dual topologique de E .

Topologie engendrée, topologie faible

Nous souhaitons maintenant introduire la notion fondamentale de topologie engendrée, dont les exemples les plus importants sont les topologies produit et faible (nous ferons une étude détaillée de la topologie faible dans un chapitre ultérieur). Pour cela nous commençons par deux remarques. La première est que si $\{\mathcal{T}_\beta\}_{\beta \in B}$ est une collection de topologies sur un même ensemble X alors l'intersection des \mathcal{T}_β est encore une topologie sur X . La seconde remarque est que, puisque $\mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X , pour toute collection $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, il existe toujours une topologie \mathcal{T} sur X telle que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Ce qui permet de définir la topologie engendrée par \mathcal{A} comme étant l'intersection de toutes les topologies contenant \mathcal{A} .

Proposition 1.2. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, la topologie engendrée par \mathcal{A} est constituée de l'ensemble vide, de X et de toutes les réunions d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} .*

Démonstration. Soit \mathcal{B} l'ensemble formé de X , et de toutes les intersections finies possibles d'éléments de \mathcal{A} . Considérons la famille \mathcal{T} de toutes les réunions d'ensembles pris dans \mathcal{B} , à laquelle on rajoute l'ensemble vide, que l'on peut aussi définir par

$$\mathcal{T} := \left\{ U \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in U, \exists V \in \mathcal{B} / x \in V \subset U \right\}.$$

Alors on peut vérifier (exercice) que \mathcal{T} est une topologie. Qui est plus fine que la topologie engendrée par \mathcal{A} (car celle ci doit, par les axiomes définissant une topologie, contenir entre autres les réunions d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A}) et qui est donc cette topologie. \square

Topologie produit. Soit $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ une famille quelconque d'espaces topologiques. Nous voulons munir l'ensemble produit $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ d'une topologie. Pour cela, étant donné $a \in A$, nous considérons la projection π_a définie par

$$\pi_a: X \rightarrow X_a, \quad x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_a.$$

Par définition, la topologie produit sur X est la topologie engendrée par

$$\mathcal{A} = \left\{ \pi_a^{-1}(U_a) \mid a \in A, U_a \in \mathcal{T}_a \right\}.$$

Proposition 1.3. *Soit A un ensemble quelconque, $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces topologiques et \mathcal{X} l'espace topologique produit. Soit \mathcal{Y} un espace topologique, et $\mathcal{F} = \{f_\alpha: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'applications. L'application*

$$\varphi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \quad y \mapsto (f_\alpha(y))_{\alpha \in A}$$

est continue si et seulement si toutes les applications f_α sont continues.

Démonstration. Soit V un ouvert de \mathcal{X} , par définition de la topologie produit V contient un ouvert U de la forme $U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ où $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ est égal à X_α pour tous les indices α sauf un nombre fini d'entre eux, notés $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Alors

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcap_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \bigcap_{1 \leq \ell \leq n} f_{\alpha_\ell}^{-1}(U_{\alpha_\ell}).$$

Tous les éléments de ces intersections sont ouverts car les f_α sont continues. Donc $\varphi^{-1}(U)$ est une partie ouverte de \mathcal{Y} comme intersection *finie* d'ouverts. On en déduit que la préimage par φ d'un ouvert est un ouvert, ce qui démontre que φ est continue. \square

En particulier, la somme, le produit (usuel ou scalaire), la différence, le quotient (lorsqu'il a un sens) d'applications continues à valeurs numériques (ou vectorielles) sont continus.

Topologie engendrée par une famille d'applications. Soit X un ensemble et $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'applications de X vers des espaces topologiques $\mathcal{Y}_\alpha = (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. La topologie engendrée par \mathcal{F} sur X est la topologie la moins fine qui rende continues toutes les applications f_α . Plus précisément, c'est la topologie engendrée par

$$\mathcal{A} := \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}.$$

Ainsi, la topologie produit est la topologie induite par la famille des projections π_α .

Topologie faible. Considérons un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Rappelons que l'on note E' son dual topologique, qui est l'ensemble des formes linéaires continues sur E . Par définition, la topologie faible sur E , notée $\sigma(E, E')$, est la topologie engendrée par E' .

1.2 Séparabilité, compacité et complétude

1.2.1 Séparabilité

Par définition :

- un espace topologique est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense ;
- une topologie est à *base dénombrable d'ouverts* lorsqu'elle possède une base d'ouverts dénombrable.

Proposition 1.4. *Un espace topologique à base dénombrable d'ouverts est séparable. Un espace métrique séparable est à base dénombrable d'ouverts.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base d'ouverts de \mathcal{X} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ choisissons $x_n \in U_n$ (on peut supposer U_n non vide). Alors $\mathcal{D} := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une

partie dense dans X . En effet pour tout ouvert U de \mathcal{X} il existe p tel que $U_p \subset U$ et donc $x_p \in U$. Tout ouvert non vide rencontre \mathcal{D} ce qui implique que \mathcal{D} est dense.

Maintenant si (X, d) est un espace métrique séparable, alors il existe $\mathcal{D} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans X . Il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une base dénombrable de voisinages de x_n notée $\mathcal{B}_n := \{U_p^n\}_{p \in \mathbb{N}}$ (en effet, il suffit de considérer l'ensemble indéxé par $r \in \mathbb{Q}$ des boules, ouvertes ou fermées, de centre x et de rayon r). La réunion $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ est une famille dénombrable et on vérifie que c'est une base d'ouverts pour (X, d) . En effet, soit U un ouvert non vide de (X, d) , et x un point quelconque de U . Comme U est ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) < r/3$ car \mathcal{D} est dense dans X . Enfin il existe un rationnel $q \in]r/3, r/2[$. Donc, en appliquant deux fois l'inégalité triangulaire, $B(x_n, q)$ vérifie $B(x_n, q) \subset U$ et $x \in B(x_n, q)$. Ainsi tout élément de U appartient à une boule prise dans la collection \mathcal{B} et donc U peut s'écrire comme réunion d'éléments de \mathcal{B} , ce qui conclut la démonstration. \square

1.2.2 Espaces séparés et espaces normaux

On dit qu'un espace topologique est un espace séparé (on dit aussi espace de *Hausdorff*) s'il vérifie la propriété suivante : si $x \neq y$, il existe deux ouverts disjoints U, V tels que $x \in U$ et $y \in V$.

On dit qu'un espace topologique est *normal* si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Si $x \neq y$, il existe un ouvert qui contient x et qui ne contient pas y ;
2. pour tout couple (F_1, F_2) de fermés disjoints il existe deux ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.

La proposition suivante donne une formulation équivalente de la première propriété.

Proposition 1.5. *Considérons un espace topologique \mathcal{X} . Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) Si $x \neq y$, il existe un ouvert qui contient x et qui ne contient pas y ;
- (ii) les singletons $\{x\}$ sont fermés pour tout $x \in X$.

Démonstration. Si \mathcal{X} vérifie la propriété (i), et $x \in X$, alors pour tout $y \neq x$ il existe un ouvert U_y tel que $x \notin U_y$, aussi $\{x\}^c = \cup_{y \neq x} U_y$ est ouvert comme réunion d'ouverts, et donc $\{x\}$ est fermé. Réciproquement supposons les singletons fermés. Soit x et y deux éléments distincts de X , alors y appartient à l'ouvert $\{x\}^c$ qui ne contient pas x . \square

Les espaces métriques sont des espaces topologiques normaux (exercice). Notons aussi qu'un produit d'espaces séparés est encore un espace séparé.

Proposition 1.6. *Un espace topologique \mathcal{X} est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.*

Démonstration. Supposons que \mathcal{X} est séparé et montrons que Δ est fermé. Si $(x, y) \in \Delta^c$, alors $x \neq y$ et il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $(x, y) \in U \times V$. Comme U et V sont disjoints $U \times V \subset \Delta^c$. Aussi $(x, y) \in (\Delta^c)^\circ$ et donc $\Delta^c = (\Delta^c)^\circ$ est un ensemble ouvert.

Supposons que Δ est fermé et montrons que \mathcal{X} est séparé. Si $x \neq y$ alors $(x, y) \in \Delta^c$ qui est un ouvert. Par définition de la topologie produit Δ^c contient un voisinage de (x, y) de la forme $U \times V$ où U et V sont deux ouverts de \mathcal{T} , nécessairement disjoints. \square

La proposition suivante se prouve facilement.

Proposition 1.7. *Tout espace topologique homéomorphe à un sous espace d'un espace topologique de Hausdorff (resp. normal) est lui aussi de Hausdorff (resp. normal).*

Proposition 1.8. *Soit \mathcal{X} un espace topologique et \mathcal{Y} un espace de Hausdorff, f et g deux applications continues de X vers Y . Alors, l'ensemble $\mathcal{E} := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé.*

Démonstration. D'après la proposition 1.6, la diagonale $\Delta_Y = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ est fermée puisque \mathcal{Y} est de Hausdorff. Soit $\varphi: X \rightarrow Y \times Y$ définie par $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, cette application est continue car f et g le sont. Alors, avec ces notations, $\mathcal{E} = \varphi^{-1}(\Delta_Y)$ et donc \mathcal{E} est fermé comme préimage d'un fermé par une application continue. \square

On déduit de cette proposition, sous ces mêmes hypothèses, que si $f = g$ sur un sous-ensemble dense de X alors $f = g$ sur X tout entier.

Lemme 1.9 (Urysohn). *Soit \mathcal{X} un espace normal. Si A et B sont des fermés disjoints, il existe $f \in C(X; [0, 1])$ telle que $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B .*

Démonstration. Admis. \square

1.2.3 Compacité

On se donne pour cette partie un espace topologique \mathcal{X} . On appelle *recouvrement* de X toute collection de parties de X , $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (A ensemble quelconque), telle que

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

On dit que c'est un recouvrement ouvert si les ensembles U_α sont ouverts. Un sous-recouvrement de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une sous-famille $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ avec $B \subset A$, telle que $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$

est un recouvrement de X . Un recouvrement est dit *fini* si l'ensemble des indices A est fini, et *dénombrable* si l'ensemble A est dénombrable.

Définition 1.10. *Un espace topologique \mathcal{X} est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

On veut ensuite définir la notion de sous-ensemble compact d'un espace topologique. Soit $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T})$ un espace topologique et E un sous-ensemble de X . Rappelons que la topologie induite par \mathcal{T} sur E , notée \mathcal{T}_E est définie par $\mathcal{T}_E := \{U \cap E \mid U \in \mathcal{T}\}$. Un sous-ensemble E de X est dit compact si (E, \mathcal{T}_E) est un espace topologique compact.

Proposition 1.11. *Si \mathcal{X} est compact et que $f: X \rightarrow Y$ est continue alors $f(X)$ est compact. En particulier, la propriété d'être compacte est invariante par difféomorphisme.*

Démonstration. Donnons nous un recouvrement ouvert, noté \mathcal{R} , de $f(X)$. Il suit que l'ensemble des préimages par f des éléments de ce recouvrement est un recouvrement de X , en effet f étant continue la préimage d'un ouvert est ouvert. Donc on peut en extraire un sous recouvrement fini de X . Les images par f des éléments de ce recouvrement de X forment alors un sous-recouvrement fini de \mathcal{R} . \square

Cependant la préimage d'un compact par une application continue f n'est pas nécessairement compact. Lorsque c'est le cas on dit que f est une application *propre*.

On donne maintenant une caractérisation de la compacité qui fait intervenir un critère portant sur des intersections de fermés, plutôt que sur des réunions d'ouverts.

Proposition 1.12. *Un espace topologique \mathcal{X} est compact si et seulement si toute famille de fermés d'intersection vide admet une sous-famille finie d'intersection vide.*

Démonstration. Se déduit directement de la définition en termes de recouvrement ouvert par passage au complémentaire. \square

Corollaire 1.13. *Considérons un espace topologique compact \mathcal{X} et une suite $\{F_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ de fermés qui est décroissante au sens où $F_{p+1} \subset F_p$ pour tout entier p . Alors l'intersection $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p$ est non vide.*

Démonstration. Si l'intersection est non vide alors la proposition précédente implique qu'il existerait une partie finie $J \subset \mathbb{N}$ telle que $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$. Ce qui est impossible car la suite $\{F_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante. \square

Considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points d'un espace topologique. Rappelons que l'on dit que ℓ est une valeur d'adhérence de cette suite si, pour tout voisinage V de ℓ , et pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in V$.

Corollaire 1.14. *Dans un espace topologique compact, toute suite admet une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et introduisons les fermés F_p définis par

$$F_p = \overline{\{x_n \mid n \geq p\}}.$$

C'est une suite décroissante de fermés qui est d'intersection non vide par compacité. On en déduit que la suite a une valeur d'adhérence. \square

Proposition 1.15. *Considérons un espace topologique séparé \mathcal{X} .*

(i) *Si K un sous-ensemble compact et x appartenant à $X \setminus K$. Alors il existe deux ouverts disjoints V et W tels que $x \in V$ et $K \subset W$.*

(ii) *Si K est un sous-ensemble compact de X , alors K est fermé dans X .*

(iii) *Si X est compact et que F est un sous-ensemble fermé de X , alors F est compact.*

Démonstration. (i) Soit y un point de K , puisque $x \neq y$ et que X est séparé, il existe deux ouverts disjoints V_y et W_y tels que $x \in V_y$ et $y \in W_y$. La collection $\{W_y\}_{y \in K}$ est un recouvrement de K donc on peut par compacité de K en extraire un sous recouvrement fini indexé par un nombre fini de points de K : y_1, \dots, y_n . On pose alors

$$V := \bigcap_{1 \leq \ell \leq n} V_{y_\ell}, \quad W := \bigcup_{1 \leq \ell \leq n} W_{y_\ell},$$

et on obtient le résultat désiré.

(ii) Montrons que le complémentaire de K est ouvert. C'est équivalent à montrer que $X \setminus K$ est un voisinage de chacun de ses points. On doit donc montrer que pour tout $x \in X \setminus K$, il existe un ouvert $V \subset X \setminus K$ tel que $x \in V$. Ceci est une conséquence directe du point (i).

(iii) Montrons déjà que F est séparé. Notons \mathcal{T} la topologie sur X et \mathcal{T}_F la topologie induite par \mathcal{T} sur F . Considérons deux points distincts x et y dans F . Comme X est séparé (par définition de la compacité), il existe deux ouverts disjoints U, V de \mathcal{T} tels que $x \in U$ et $y \in V$. Alors $U \cap K$ et $V \cap K$ sont deux ouverts disjoints de la topologie induite \mathcal{T}_F . Ce qui démontre que \mathcal{T}_F est séparée.

Pour montrer que K est compact, il suffit maintenant de montrer que toute famille $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de fermés (pour la topologie induite \mathcal{T}_F) d'intersection vide admet une sous-famille finie d'intersection vide. Par compacité de X , il suffit donc de montrer que les ensembles F_α sont aussi des fermés pour la topologie \mathcal{T} . Pour cela écrivons que $F \setminus F_\alpha$ est un ouvert de \mathcal{T}_F implique qu'il existe un ouvert U_α de \mathcal{T} tel que $F \setminus F_\alpha = U_\alpha \cap F$. On vérifie alors (exercice) que $X \setminus F_\alpha = X \setminus (F \cap (X \setminus U_\alpha))$. Comme F et $X \setminus U_\alpha$ sont fermés, l'ensemble $X \setminus F_\alpha$ est fermé comme complémentaire d'un ensemble ouvert. \square

Un sous-ensemble E de X est dit *relativement compact* si sa fermeture est un sous-ensemble compact de X . Comme tout fermé d'un espace topologique compact \mathcal{X} est compact d'après la proposition précédente, on en déduit que tout sous-ensemble d'un espace topologique compact est relativement compact.

Proposition 1.16. *Soit \mathcal{X} un espace topologique séparé, K_1 et K_2 deux sous-ensembles compacts disjoints. Alors il existe deux ouverts disjoints V_1 et V_2 tels que $K_i \subset V_i$ ($i = 1, 2$).*

Démonstration. D'après la proposition 1.15, pour tout x dans K_1 il existe deux ouverts disjoints V_x et W_x tels que $x \in V_x$ et $K_2 \subset W_x$. Les ouverts $\{V_x\}_{x \in K_1}$ forment un recouvrement de K_1 , dont on peut extraire un sous recouvrement fini : $\{V_{x_\ell}\}_{1 \leq \ell \leq n}$. On pose

$$V_1 := \bigcup_{1 \leq \ell \leq n} V_{x_\ell}, \quad V_2 := \bigcap_{1 \leq \ell \leq n} W_{x_\ell}.$$

□

Proposition 1.17. *Tout espace topologique compact est normal.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1.16 et du fait que tout fermé d'un espace compact est compact. □

Définition 1.18. *Un espace topologique \mathcal{X} est séquentiellement compact si de toute suite de points de X on peut extraire une sous-suite convergente. Un sous-ensemble E de X est dit séquentiellement compact si (E, \mathcal{T}_E) est séquentiellement compact.*

Définition 1.19. *Un espace métrique X est pré-compact (on dit aussi totalement borné) si, pour $\varepsilon > 0$, X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε .*

Théorème 1.20. *Considérons un espace métrique X . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. X est compact.
2. X est pré-compact et complet.
3. X est séquentiellement compact.

Démonstration. Nous renvoyons à un livre de topologie pour la démonstration de ce résultat classique. □

Proposition 1.21. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\{B(x, 1/n)\}_{x \in X}$ recouvre X donc on peut en extraire un sous recouvrement fini $\{B(x_n^p, 1/n)\}_{p \in I_n}$ où I_n est fini. L'ensemble

$$\mathcal{D} := \{x_n^p \mid n \in \mathbb{N}^*, p \in I_n\}$$

est alors un ensemble dénombrable dense. □

1.2.4 Complétude

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X, d) . Cette suite est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_p, x_n) < \varepsilon$ quand n et p sont plus grands que N . Par exemple, toute suite convergente est une suite de Cauchy. Réciproquement, si toute suite de Cauchy est convergente on dit que l'espace métrique (X, d) est *complet*.

On remarque que toute sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy et que toute suite de Cauchy est bornée. Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge vers cette valeur (autrement dit : si une sous-suite d'une suite de Cauchy converge alors la suite tout entière converge).

Un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance induite par la norme est appelé *espace de Banach*.

Proposition 1.22. *Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi.*

Démonstration. Soit T_n le terme général d'une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$. Pour tout $x \in E$ on a

$$\|T_n(x) - T_p(x)\|_F \leq \|T_n - T_p\| \cdot \|x\|_E,$$

donc $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F . Si F est complet elle converge vers un élément noté $T(x)$. On vérifie facilement que $E \ni x \mapsto T(x) \in F$ est une application linéaire continue et que T_n converge vers cette application. □

1.3 Espaces vectoriels topologiques

Définition 1.23. *Un espace vectoriel topologique est un \mathbb{K} -espace vectoriel E , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , muni d'une topologie telle que les opérations d'addition vectorielle $(x, y) \mapsto x + y$ et de multiplication par un scalaire $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ soient continues.*

Par exemple, tout espace vectoriel normé est un espace topologique. Nous allons nous intéresser à des espaces vectoriels topologiques E dont la topologie n'est pas induite par une norme, mais par une famille de semi-normes. Nous n'allons pas développer la théorie

générale de ces espaces. Nous allons considérer uniquement le cas le plus simple, qui va nous permettre de décrire tous les espaces dont nous aurons besoin dans ce livre.

Définition 1.24. (i) Rappelons qu'une semi-norme est une application $\varrho: E \rightarrow [0, +\infty[$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a $\varrho(\lambda x) = |\lambda| \varrho(x)$ (ce qui implique que $\varrho(0) = 0$) et $\varrho(x + y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$. Une semi-norme est une norme si de plus $\varrho(x) = 0$ implique $x = 0$.

(ii) Une famille graduée de semi-normes est une famille dénombrable $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de semi-normes vérifiant

$$\varrho_0(f) \leq \varrho_1(f) \leq \varrho_2(f) \leq \dots$$

pour tout f dans E .

Exemple 1.25. (i) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé et $\varrho_n = \|\cdot\|_E$ pour tout n , alors $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille graduée de semi-normes.

(ii) Considérons un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et notons $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans K . Alors on définit une famille graduée de semi-normes par

$$\varrho_n(f) = \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f(x)|.$$

Ces semi-normes sont mêmes des normes mais, en général, on dit quand même semi-norme dans la pratique. La raison en est que la topologie naturelle sur $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ (donnée par la proposition 1.26 ci-dessous) n'est pas celle d'un espace vectoriel normé.

(iii) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . On veut définir une famille graduée de semi-normes sur $E = C^k(\Omega)$. Pour cela on considère une suite exhaustive de compacts recouvrant Ω (par définition, c'est une suite croissante de compacts dont la réunion est égale à Ω). On obtient une telle suite en posant

$$K_n = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n\} \cap \overline{B(0, n)}.$$

Alors on peut définir une famille graduée de semi-normes par

$$\varrho_n(f) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_n} |\partial_x^\alpha f(x)|.$$

(iv) Notons $L_{loc}^p(\Omega)$ l'espace des fonctions dont la restriction à un ouvert borné quelconque appartient à $L^p(\Omega)$. Alors on définit une famille graduée de semi-normes en posant

$$\varrho_n(f) = \|f\|_{L^p(K_n)}.$$

Proposition 1.26. Considérons un espace vectoriel E muni d'une famille graduée de semi-normes $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On munit E de la topologie induite par la famille d'applications $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (c'est la topologie minimale qui rendent continues toutes les applications ϱ_n).

i) Alors E est un espace vectoriel topologique.

ii) Étant donné $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, on introduit

$$B_n(x, \varepsilon) = \{y \in E : \varrho_n(x - y) < \varepsilon\}.$$

Alors $\{B_n(x, \varepsilon) : n \in \mathbb{N}, x \in E, \varepsilon > 0\}$ est une base de voisinages de cette topologie.

iii) La convergence d'une suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vers x est équivalente à la convergence de $\|x_j - x\|_n$ vers 0 pour tout n

iv) Cette topologie est métrisable, elle est induite par la distance

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\varrho_n(x - y)}{1 + \varrho_n(x - y)}.$$

Démonstration. Ces quatre propriétés découlent directement des définitions. □

Définition 1.27. *Considérons un espace vectoriel topologique dont la topologie est induite par une famille graduée de semi-normes $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que E est un espace de Fréchet s'il est complet pour la distance*

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\varrho_n(x - y)}{1 + \varrho_n(x - y)}.$$

Proposition 1.28. *Les espaces locaux $L_{loc}^p(\Omega)$, $C^k(\Omega)$ et $C_K^\infty(\Omega)$, munis des familles de semi-normes introduites précédemment, sont des espaces de Fréchet.*

Démonstration. C'est est un corollaire du fait que les espaces correspondants de fonctions restreints à K_n sont des espaces complets. □

1.4 Première illustration : topologie des espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 1.29. *Soit X un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il existe une et une seule topologie séparée qui munisse X d'une structure d'espace vectoriel topologique.*

Démonstration. Notons d la dimension de X et choisissons une base arbitraire $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ de X . Nous définissons la norme $\|\cdot\|$ par

$$x = \sum_{i=1}^d x_i \beta_i \implies \|x\| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Enfin nous considérons une topologie τ séparée et compatible avec les opérations algébriques. Nous noterons X_n le couple $(X, \|\cdot\|)$, et X_τ le couple (X, τ) . Nous allons montrer que l'application identité I est un homéomorphisme de X_n sur X_τ .

(a) I est continue de X_n vers X_τ . Soit U un voisinage quelconque de 0 dans X_τ . L'application que l'on introduit ci-dessous est continue car τ est compatible avec l'addition de X ,

$$X_\tau \times \cdots \times X_\tau \ni (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_1 + \cdots + x_d \in X_\tau.$$

La continuité de cette application en 0 implique l'existence de d voisinages ouverts de 0, $V_i \in \tau$, tels que $V_1 + \cdots + V_d \subset U$. Posons

$$(1.4.1) \quad W = \bigcap_{i=1}^d V_i \quad \text{qui vérifie} \quad W + \cdots + W \subset U.$$

L'ensemble W est un voisinage ouvert de 0 dans X_τ , la continuité de la multiplication par un scalaire se traduit par l'existence de d réels strictement positifs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ tels que :

$$(1.4.2) \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall \xi \in \mathbb{K} : \quad [|\xi| < \varepsilon_i] \Rightarrow [\xi \beta_i \in W].$$

Posons $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq d\}$, alors la boule de X_n centrée en 0 et de rayon ε est incluse dans U d'après les relations (1.4.1) et (1.4.2). Donc I est continue en 0, et par linéarité I est continue (de X_n vers X_τ).

(b) I est continue de X_τ vers X_n . Soit V un voisinage quelconque de 0 dans X_n , V contient une boule ouverte $B_\rho = \{x \in X \mid \|x\| < \rho\}$. Soit \mathcal{S} la frontière de cette boule, c'est un ensemble fermé et borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie, donc c'est un sous-ensemble compact de X_n (voir le lemme ci-dessous). Par continuité de I de X_n vers X_τ prouvée ci-dessus, \mathcal{S} est un sous-ensemble compact de X_τ , et τ étant séparée, \mathcal{S} est un fermé de τ . Comme $0 \notin \mathcal{S}$, il existe $W \in \tau$, tel que $\mathcal{S} \cap W = \emptyset$. Par continuité de la multiplication par un scalaire en 0, il existe $\delta > 0$ et W' voisinage de 0 tels que $tx \in W$ pour $|t| \leq \delta$ et $x \in W'$. Donc

$$U = \bigcup_{|t| \leq \delta} tW' \subset W.$$

Nous affirmons que $U \subset V$. En effet, supposons qu'il existe $x \in U \setminus V$, en particulier $\|x\| \geq \rho$. Posons $\lambda = \rho/\|x\|$ et $y = \lambda x$, $|\lambda| \leq 1$ et $x \in U$ implique que $y \in U$. D'autre part $\|y\| = \rho$ donc $y \in \mathcal{S}$, ce qui contredit $\mathcal{S} \cap W = \emptyset$. Nous avons bien montré que I est continue en 0, et par linéarité continue de X_τ vers X_n .

L'application I est donc un homéomorphisme, ce qui montre $X_n = X_\tau$.

Pour conclure la démonstration, il reste à démontrer le lemme suivant qui a été utilisé ci-dessus.

Lemme 1.30. Soit \mathcal{K} une partie fermée et bornée de X_n , alors \mathcal{K} est compacte.

Démonstration. Nous choisissons de façon arbitraire une base $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ de X , et nous définissons l'isomorphisme linéaire :

$$I : X \rightarrow \mathbb{K}^d, \quad \sum_{i=1}^d x_i \beta_i \mapsto (x_1, \dots, x_d).$$

Par définition

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{1/2},$$

ainsi I est clairement un isomorphisme isométrique, donc un homéomorphisme. En particulier $I(\mathcal{K})$ est fermé borné dans \mathbb{K}^d donc compact, et par continuité de I^{-1} , \mathcal{K} est une partie compacte de X_n . \square

Ceci conclut la démonstration du théorème. \square

Corollaire 1.31. Il y a équivalence des normes en dimension finie.

Démonstration. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur l'espace vectoriel X . D'après le théorème précédent, l'application identité, I , est un homéomorphisme de $(X, \|\cdot\|_1)$ sur $(X, \|\cdot\|_2)$. En traduisant la continuité de I , et de sa réciproque, en 0, on déduit l'existence de deux constantes telles que :

$$(1.4.3) \quad \|x\|_1 \leq \delta_1 \Rightarrow \|x\|_2 \leq 1,$$

$$(1.4.4) \quad \|x\|_2 \leq \delta_2 \Rightarrow \|x\|_1 \leq 1.$$

La propriété d'homogénéité des normes appliquée aux relations (1.4.3) et (1.4.4) implique

$$\delta_2 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{\delta_1} \|x\|_1,$$

ce qui est le résultat désiré d'équivalence des deux normes. \square

Corollaire 1.32. Soit X un espace vectoriel normé de dimension finie, alors les topologies faible et forte coïncident.

Remarque 1.33. C'est en fait une condition nécessaire et suffisante. En effet, en dimension infinie, la topologie faible n'est pas métrisable. On peut voir plus directement que la topologie faible n'est pas normable (il n'existe pas de norme qui induise la topologie faible) en montrant que tout voisinage de 0 pour la topologie faible contient une droite vectorielle de X .

Démonstration. Il suffit de vérifier que la topologie faible munit X d'une structure d'espace vectoriel topologique séparée, ce que nous démontrerons plus tard comme corollaire du théorème de Hahn-Banach. \square

1.5 Seconde illustration : théorème d'Arzela–Ascoli

Définition 1.34. Soient (X, \mathcal{T}) un espace topologique, (Y, ρ) un espace métrique et \mathcal{F} une famille de fonctions $f_n: X \rightarrow Y$. Etant donné un élément x de X , on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x (c'est l'ensemble des parties de X qui contiennent un élément de τ contenant x). Par définition, \mathcal{F} est équicontinue dès que

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{O} \in \mathcal{V}(x) / \forall z \in \mathcal{O}, \forall f \in \mathcal{F}, \quad \rho(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Théorème 1.35 (Arzela–Ascoli). Soient (X, \mathcal{T}) un espace topologique séparable, (Y, ρ) un espace métrique et \mathcal{F} une famille équicontinue de fonctions $f_n: X \rightarrow Y$. Si $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte pour tout $x \in X$, alors :

- (i) il existe une sous suite de \mathcal{F} qui converge simplement vers une fonction f ;
- (ii) la convergence est uniforme sur tous les compacts.

Démonstration. Notons par $\mathcal{D} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense dans X . L'adhérence dans X de la suite des images par les fonctions f_n de x_1 est un ensemble compact dans l'espace métrique Y , donc aussi séquentiellement compact. On en extrait une sous-suite, notée $\{f_{1,n}(x_1)\}_{n \geq 1}$, convergente. On construit alors de façon successive une suite $\{f_{j+1,n}(x_{j+1})\}_{n \geq 1}$ à partir de $\{f_{j,n}(x_{j+1})\}_{n \geq 1}$ telle que la suite $\{f_{j+1,n}(x_{j+1})\}_{n \geq 1}$ converge. Puis, pour tout $j \geq 1$, on considère, par extraction diagonale, la suite $\{f_{n,n}(x_j)\}_{n \geq 1}$. C'est une sous-suite de $\{f_{j,n}(x_j)\}_{n \geq 1}$ donc elle converge. Pour alléger on pose $g_n = f_{n,n}$. On a ainsi défini une suite g_n qui converge simplement sur \mathcal{D} .

Pour montrer que g_n converge simplement sur X tout entier il suffit de montrer que $\{g_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour tout $x \in X$. En effet $g_n(x)$ appartient à l'adhérence dans X de la suite $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ qui est compact et donc complet. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque \mathcal{F} est équicontinue il existe un voisinage \mathcal{O} de x tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathcal{O} : \quad \rho(g_n(x), g_n(z)) < \varepsilon/3.$$

Comme \mathcal{D} est dense dans X il existe $x_i \in \mathcal{D}$ tel que $x_i \in \mathcal{O}$. Enfin, par convergence de $\{g_n(x_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$, il existe N tel que pour $m, n \geq N$ on ait $\rho(g_n(x_i), g_m(x_i)) < \varepsilon/3$. Ce qui permet de conclure à la convergence simple car :

$$\begin{aligned} \rho(g_n(x), g_m(x)) &\leq \rho(g_n(x), g_n(x_i)) + \rho(g_n(x_i), g_m(x_i)) + \rho(g_m(x_i), g_m(x)) \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3. \end{aligned}$$

On montre directement la continuité de g : on fait un passage à la limite dans l'inégalité de l'équicontinuité. Ici la continuité passe à la limite simple, ce qui est faux dans le cas

général, car l'ouvert \mathcal{O} ne dépend pas de n ainsi l'ouvert ne peut pas se réduire à un seul point quand n tend vers $+\infty$ (comme c'est le cas pour la suite $x \mapsto x^n$, sur $[0, 1[$).

Soit maintenant K un compact de X , montrons que la convergence est uniforme sur K . La propriété d'équicontinuité implique que, pour tout élément x de X , il existe un voisinage \mathcal{O}_x de x tel que,

$$\forall z \in \mathcal{O}_x, \forall f \in \mathcal{F}, \rho(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Alors $(\mathcal{O}_x)_{x \in K}$ forme un recouvrement ouvert de K , dont on peut extraire un sous-recouvrement fini indéxé par x_1, \dots, x_M . M étant fini on peut trouver N tel que pour tout $n \geq N$, $\rho(g_n(x_i), g(x_i)) < \varepsilon/3$. Et maintenant pour tout $k \in K$:

$$\begin{aligned} \rho(g_n(k), g(k)) &\leq \rho(g_n(k), g_n(x_i)) + \rho(g_n(x_i), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g(k)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui donne la convergence uniforme sur les compacts. □

1.6 Troisième illustration : théorème du point fixe

Considérons un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ et une fonction $\Phi: X \rightarrow X$. On cherche à résoudre l'équation

$$\Phi(u) = 0.$$

Supposons que l'on connaisse $u_0 \in X$ tel que $\varepsilon_0 = \|\Phi(u_0)\|$ soit petit. On cherche à définir, par récurrence, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_n = \|\Phi(u_n)\|$ converge vers 0. On parle de schémas itératifs. Les deux exemples principaux sont le schéma de Picard et le schéma de Newton.

Schéma de Picard

Commençons par l'exemple fondamental de la résolution de $\Phi(u) = 0$ dans le cas où $\Phi - I$ est une application contractante, au sens de la définition suivante.

Définition 1.36. Soit (E, d) un espace métrique et un nombre réel positif k . On dit qu'une application $f: E \rightarrow E$ est k -Lipschitzienne si, pour tout couple (x, y) dans $E \times E$,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

On dit que f est contractante si elle est k -Lipschitzienne pour un certain k appartenant à $[0, 1[$.

Théorème 1.37. Soit E un espace métrique complet et $f: E \rightarrow E$ une application contractante. Il existe un unique point fixe x^* de f dans E , c'est-à-dire tel que $f(x^*) = x^*$. De plus toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x^* .

Démonstration. Soit $x_0 \in E$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors $d(x_{m+1}, x_m) \leq kd(x_m, x_{m-1})$ donc

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq k^m d(x_1, x_0).$$

Comme $x_{n+p} - x_n = x_{n+1} - x_n + \dots + x_{n+p} - x_{n+p-1}$ on en déduit

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (k^n + \dots + k^{n+p-1})d(x_1, x_0) \leq k^n \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0)$$

donc la suite est de Cauchy. Comme E est un espace complet, cette suite converge vers un élément noté x^* . Pour montrer que x^* est un point fixe de f nous allons utiliser l'inégalité précédente $d(x_{m+1}, x_m) \leq k^m d(x_1, x_0)$ qui entraîne que $d(f(x_m), x_m) \leq k^m d(x_1, x_0)$. Comme $k < 1$ et que f est continue, on peut passer à la limite dans cette inégalité pour déduire que $d(f(x^*), x^*) = 0$, ce qui démontre que x^* est un point fixe de f . \square

Schéma de Newton

Posons

$$B = \{u \in X : \|u\| \leq 1\}, \quad 5B = \{u \in X : \|u\| \leq 5\}.$$

On suppose que $u_0 \in B$ et $\Phi(u_0) \in B$. Supposons de plus que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) Il existe $C_1 > 0$ telle que, pour tout $u \in 5B$ et pour tout $v \in X$ tel que $u + v \in 5B$,

$$\|\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi'(u)v\| \leq C_1 \|v\|^2.$$

(2) Il existe $C_2 > 0$ telle que, pour tout $u \in 5B$, l'application $\Phi'(u)$ est inversible et

$$\forall v \in X, \quad \|\Phi'(u)^{-1}v\| \leq C_2 \|v\|.$$

Nous allons montrer que si $\varepsilon_0 := \|\Phi(u_0)\|$ est assez petit, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_n = -\Phi'(u_n)^{-1}\Phi(u_n),$$

est bien définie et de plus $\varepsilon_n := \|\Phi(u_n)\|$ converge vers 0. Pour cela, il suffit de montrer par récurrence que

$$\begin{aligned} (P_1(n)) \quad & u_n \in 5B, \\ (P_2(n)) \quad & \varepsilon_n \leq (A\varepsilon_0)^{2^n} / A \end{aligned}$$

avec $A = C_1 C_2^2$. On choisit alors ε_0 assez petit ($A\varepsilon_0 < 1$), et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution de $\Phi(u) = 0$.

Ces deux propriétés (P_1) et (P_2) sont vraies pour $n = 0$. Supposons qu'elles sont vraies jusqu'au rang n .

Montrons $(P_1(n+1))$. L'hypothèse (2) implique que

$$(1.6.1) \quad \|v_n\| = \|\Phi'(u_n)^{-1}\Phi(u_n)\| \leq C_2\varepsilon_n.$$

Comme

$$u_{n+1} = (u_{n+1} - u_n) + \cdots + (u_1 - u_0) + u_0 = v_n + \cdots + v_1 + u_0$$

on a $\|u_{n+1}\| \leq C_2 \sum_{k=0}^n \varepsilon_k + \|u_0\|$ donc la propriété $(P_1(n+1))$ sera une conséquence automatique des inégalités $\varepsilon_k \leq (A\varepsilon_0)^{2^k}/A$ pour $0 \leq k \leq n$ si ε_0 est assez petit.

Il reste à démontrer $(P_2(n+1))$. Ecrivons

$$\Phi(u_n + v_n) - \Phi(u_n) - \Phi'(u_n)v_n = \Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_n) + \Phi'(u_n)\Phi'(u_n)^{-1}\Phi(u_n) = \Phi(u_{n+1}).$$

Donc, l'hypothèse (1) et (1.6.1) impliquent que

$$\varepsilon_{n+1} = \|\Phi(u_{n+1})\| \leq C_1 \|v_n\|^2 \leq C_1 C_2^2 \varepsilon_n^2 = A\varepsilon_n^2.$$

L'hypothèse de récurrence $(P_2(n))$ entraîne que

$$\varepsilon_{n+1} \leq A \frac{(A\varepsilon_0)^{2^{n+1}}}{A^2} = \frac{(A\varepsilon_0)^{2^{n+1}}}{A}$$

ce qui démontre $(P_2(n+1))$.

Pour conclure on déduit de (1.6.1) que (u_n) est une suite de Cauchy.

1.7 Quatrième illustration : inversion locale et Nash-Moser

Dans cette section nous allons voir la démonstration du théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach. Nous verrons ensuite une version simple du théorème de Nash qui est essentiellement une extension du théorème d'inversion locale au cadre des espaces de Fréchet.

1.7.1 Le théorème des fonctions implicites usuel

Théorème 1.38. *Soit $f: U \rightarrow B_2$ une application C^1 d'un ouvert U d'un espace de Banach B_1 à valeurs dans un espace de Banach B_2 . Si $f'(x_0)$ est un isomorphisme de*

B_1 sur B_2 alors f est un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de $f(x_0)$.

Démonstration. On commence par se ramener au cas $B_1 = B_2$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = x_0$ et $f'(x_0) = I$. Introduisons alors $\varphi(x) = x - f(x)$. La différentielle $\varphi'(0)$ de φ est nulle en 0 donc il existe $r > 0$ tel que $\overline{B_r}$ est incluse dans U et tel que la norme de la différentielle de φ soit toujours inférieure à $1/2$ sur cette boule. On introduit $W = B_{r/2}$ et $V = B_r \cap f^{-1}(W)$. Montrons que f est bijective de V dans W .

Surjectivité. On écrit l'équation $y = f(x)$ sous la forme

$$x = h(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = y + \varphi(x) = x + y - f(x),$$

et on cherche un **point fixe** de h .

L'inégalité des accroissements finis implique que φ est $1/2$ -lipschitzienne sur $\overline{B_r}$. Ainsi $\|\varphi(x)\| < r/2$ pour tout $x \in B_r$. Pour tout $y \in W = B_{r/2}$ on a $\|y\| < r/2$ donc h envoie $\overline{B_r}$ dans elle même par l'inégalité triangulaire. De plus h , comme φ , est $1/2$ -lipschitzienne. Donc h admet un point fixe x dans $\overline{B_r}$ (d'après le théorème du point fixe). On vérifie que x appartient à V .

Injectivité. Pour tout $(x_1, x_2) \in V \times V$,

$$\|x_1 - x_2\| = \|\varphi(x_1) + f(x_1) - \varphi(x_2) - f(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|$$

donc $\|x_1 - x_2\| \leq 2 \|f(x_1) - f(x_2)\|$.

Régularité. D'abord on observe que $f'(x) = I - \varphi'(x)$ et $\varphi'(x)$ est de norme inférieure à $1/2 < 1$. Donc $f'(x)$ est d'inverse bornée, donnée par $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\varphi'(x))^n$. On montre ensuite que f^{-1} est différentiable et que sa différentielle est l'inverse de $f'(f^{-1}(x))$. Comme f^{-1} est différentiable elle est continue et $x \mapsto (f'(f^{-1}(x)))^{-1}$ est continue par composition de fonctions continues. \square

De plus, on démontre que si f est injective et si pour tout x de U la différentielle $f'(x)$ est un isomorphisme bicontinu, alors $f(U)$ est un ouvert et la bijection réciproque, de $f(U)$ dans U , est de classe C^1 .

Le théorème d'inversion locale appliqué à la fonction $F(x, y) = (x, f(x, y))$ implique le théorème des fonctions implicites.

Théorème 1.39. Soient B_0, B_1, B_2 trois espaces de Banach, U un voisinage de (x_0, y_0) dans $B_0 \times B_1$ et $f: U \rightarrow B_2$ une application de classe C^1 . Supposons qu'il existe une application linéaire continue $A: B_2 \rightarrow B_1$ telle que $f'_y(x_0, y_0)A = I_{B_2}$. Il existe alors $g \in C^1$ au voisinage de x_0 à valeurs dans B_1 telle que $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$. Si de plus f'_y est bijective, g est unique et $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ équivaut à $y = g(x)$ pour (x, y) voisin de (x_0, y_0) .

1.7.2 Le théorème de Nash-Moser

(Cette section est assez subtile et peut-être ignorée en première lecture.)

Nous commençons en donnant un contre exemple qui montre que le théorème des fonctions implicites n'est pas vrai dans un espace de Fréchet ¹.

Considérons l'opérateur $P: C^\infty([-1, 1]) \rightarrow C^\infty([-1, 1])$ défini par

$$P(f) = f - xf \frac{df}{dx}.$$

P est régulier, au moins au sens où

$$DP(f)g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (P(f + \varepsilon g) - P(f)) = g - xg \frac{df}{dx} - xf \frac{dg}{dx}.$$

Pour $f = 0$ on a $DP(0)g = g$ donc $DP(0) = I$. Comme $P(0) = 0$, si le théorème d'inversion locale était vrai, l'image de P devrait contenir un voisinage de 0. Montrons que ce n'est pas le cas. Considérons la suite $g_n = 1/n + x^n/n!$ qui converge vers 0 dans $C^\infty([-1, 1])$. Nous allons montrer que g_n n'appartient pas à l'image de P pour tout $n > 1$. Plus généralement montrons que $G_n = 1/n + b_n x^n$ n'appartient pas à l'image de P pour tout $n > 1$. Supposons que $P(f) = 1/n + b_n x^n$ et considérons le développement en série formelle de f :

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

alors

$$P(f) = a_0 + (1 - a_0)a_1 x + (a_2 - a_1^2 - 2a_0 a_2)x^2 + (a_3 - 3a_1 a_2 - 3a_0 a_3)x^3 + \dots$$

peut s'écrire sous la forme $P(f) = a_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k + \dots$ avec

$$\alpha_1 = (1 - a_0)a_1, \quad \alpha_k = (1 - k a_0)a_n + Q_k(a_1, \dots, a_{k-1}) \text{ pour } k \geq 2,$$

où Q_k vérifie $Q_k(0) = 0$. Nécessairement $a_0 = 1/n$ et donc $a_0 \neq 1$ si $n > 1$. Alors $(1 - a_0)a_1 = 0$ donc $a_1 = 0$. On montre alors par récurrence que $a_k = 0$ pour $k < n$. Alors $\alpha_n = (1 - n a_0)a_n$ et donc $\alpha_n = 0$ car $a_0 = 1/n$. Il est donc impossible d'imposer $\alpha_n = b_n$ et donc de résoudre $P(f) = 1/n + b_n x^n$.

Remarque. Le problème provient du fait que $DP(f)$ peut être non inversible pour f arbitrairement petit. En effet

$$DP(1/n)x^k = (1 - k/n)x^k$$

1. Ce contre exemple est extrait de l'article de revue d'Hamilton au Bulletin de l'American Mathematical Society, qui est un texte de référence sur le sujet.

donc $DP(1/n)x^n = 0$. Même si $DP(0)$ est l'identité, $DP(f)$ peut être non inversible pour f arbitrairement proche de 0. Dans les hypothèses du théorème de Nash–Moser, on supposera que la différentielle est inversible dans **un voisinage** du point considéré. Notons le contraste avec le théorème d'inversion locale qui assure que l'on peut résoudre une équation non linéaire à partir de la résolution d'une seule équation linéaire.

Par soucis de simplicité, nous allons démontrer le théorème de Nash-Moser dans le contexte le plus simple et indiquerons des références qui démontrent le cas général. Nous allons considérer une échelle d'espaces de Banach $(X^\sigma, \|\cdot\|_\sigma)_{\sigma \geq 0}$. On pensera à σ comme étant un paramètre mesurant la régularité d'une fonction, c'est-à-dire le nombre de dérivées que l'on contrôle dans une certaine norme (par exemple $X^k = C^k(\mathbb{R})$ pour $k \in \mathbb{N}$). Nous verrons dans ce cours plusieurs échelles d'espaces de Banach, la plus importante dans les applications étant celle des espaces de Sobolev.

Définition. On dit qu'une famille à un paramètre d'espaces de Banach $(X^\sigma, \|\cdot\|_\sigma)_{\sigma \geq 0}$ est une échelle d'espaces de Banach si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(P1) Pour tout $0 \leq \sigma' \leq \sigma < \infty$,

$$X^\infty \subset X^\sigma \subset X^{\sigma'} \subset X^0, \quad X^\infty := \bigcap_{\sigma \geq 0} X_\sigma,$$

et $\|\cdot\|_{\sigma'} \leq \|\cdot\|_\sigma$.

(P2) Il existe une régularisation : il existe une famille à un paramètre $(S(N))_{N \geq 1}$ d'opérateurs linéaires régularisants $S(N): X^0 \rightarrow X^\infty$ tels que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S(N)u - u\|_0 = 0, \quad \forall u \in X_0,$$

et, pour tout $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|u - S(N)u\|_s &\leq C(s, t)N^{-t} \|u\|_{s+t}, \\ \|S(N)u\|_{s+t} &\leq C(s, t)N^t \|u\|_s. \end{aligned}$$

Il est intéressant d'observer que sous cette seule hypothèse on peut démontrer une inégalité d'interpolation.

Lemme 1.40. Soit $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ et soit $\alpha \in [0, 1]$. Il existe une constante A telle que, pour tout $u \in X_{\lambda_2}$,

$$\|u\|_\lambda \leq A \|u\|_{\lambda_1}^{1-\alpha} \|u\|_{\lambda_2}^\alpha, \quad \lambda = (1 - \alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2.$$

Démonstration. Soit $N > 0$. On peut décomposer u sous la forme $u = S(N)u + (I - S(N))u$ et en déduire que

$$\|u\|_\lambda \leq \|S(N)u\|_\lambda + \|(I - S(N))u\|_\lambda \leq CN^{\lambda-\lambda_1} \|u\|_{\lambda_1} + CN^{-(\lambda_2-\lambda)} \|u\|_{\lambda_2}.$$

On obtient le résultat voulu en optimisant cette inégalité. \square

Considérons une échelle d'espaces de Banach (X^σ) et une application $u \mapsto \Phi(u)$ de domaine de définition X^m pour un certain $m \geq 0$ et d'image contenue dans X^0 . Nous voulons résoudre l'équation $\Phi(u) = 0$, en supposant que l'on connaisse une bonne solution approchée, c'est-à-dire un élément $u_0 \in X^\infty$ tel que $\Phi(u_0)$ est suffisamment petit dans X^k avec k grand. La méthode de Nash-Moser est une élaboration du schéma de Newton qui permet de résoudre l'équation $\Phi(u) = 0$ dans certaines situations où l'inverse de $\Phi'(0)$ n'est pas bornée. Cette méthode construit une solution u de $\Phi(u) = 0$ comme la limite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = u_n - S(N_n)\Phi'(u_n)^{-1}\Phi(u_n),$$

où $S(N_n)$ est un opérateur régularisant. L'idée est que la convergence très rapide du schéma permet de compenser le fait que l'inverse de $\Phi'(u_n)$ n'est pas bornée.

L'hypothèse principale est que Φ est C^2 (ou $C^{1,\alpha}$ avec $\alpha > 0$) et que l'équation linéarisée

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi(u + tv) - \Phi(u)) = \Phi'(u)v = g$$

a des solutions approchées, non seulement pour $u = 0$ mais pour tout u dans un voisinage de 0.

Hypothèse 1.41. *Dans toute la suite on fixe $m \geq 0$ et considère une fonction $u \mapsto \Phi(u)$ de domaine de définition X^m et d'image contenue dans X^0 . On suppose qu'il existe des constantes $K_j \geq 1$ ($1 \leq j \leq 4$) et $\tau \geq 0$ telles que pour tout $s \geq 0$ les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(condition C^0) $\Phi : X^{s+m} \rightarrow X^s$ et

$$(1.7.1) \quad \|\Phi(u)\|_s \leq K_1(1 + \|u\|_{s+m}), \quad \forall u \in X^\infty.$$

(condition $C^{1,1}$) $\Phi : X^{s+m} \rightarrow X^s$ est différentiable et

$$(1.7.2) \quad \|\Phi'(u)h\|_s \leq K_2 \|h\|_{s+m}, \quad \forall u, h \in X^\infty,$$

et la partie quadratique

$$\mathcal{Q}(u, u') = \Phi(u') - \Phi(u) - \Phi'(u)[u' - u]$$

est estimée par

$$(1.7.3) \quad \|\mathcal{Q}(u, u')\|_s \leq K_3 \|u' - u\|_{s+m}^2, \quad \forall u, u' \in X^\infty.$$

(Inversion de la différentielle avec perte de dérivée) Pour tout $u \in X^\infty$ il existe un opérateur linéaire $L(u) : X^\tau \rightarrow X^0$ vérifiant

$$\Phi'(u)(L(u)h) = h, \quad \forall h \in X^\infty$$

et tel que

$$(1.7.4) \quad \|L(u)h\|_s \leq K_4 \|h\|_{s+\tau}, \quad \forall h \in X^\infty.$$

Théorème 1.42 (Nash). *Soit $s_0 > m + \tau$. Si $\|\Phi(0)\|_{s_0+\tau}$ est assez petit alors il existe une solution $u \in X^{s_0}$ de l'équation $\Phi(u) = 0$.*

Démonstration. Nous allons construire par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$(1.7.5) \quad \|\Phi(u_n)\|_{s_0-m} < M_n^{-1}$$

$$(1.7.6) \quad \|u_{n+1} - u_n\|_{s_0} < M_n^{-1}$$

où M_n est une suite rapidement croissante telle que $M_{n+1} = M_n^\gamma$ pour un certain $\gamma > 1$. La seconde estimation implique que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X^{s_0} et donc qu'elle converge. La première estimation et la continuité de Φ entraîne que la limite est solution de $\Phi(u) = 0$.

En partant de $u_0 = 0$ nous définirons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en résolvant, de façon approchée, l'équation

$$\Phi'(u_n)(u_{n+1} - u_n) + \Phi(u_n) = 0.$$

Ce qui veut dire qu'à chaque étape on utilise un opérateur régularisant pour compenser le fait que $\Phi'(u)$ n'est pas inversible à cause d'une perte éventuelle de dérivée.

Soit $2 < N_0 < N_1 < \dots$ une suite rapidement croissante donnée par

$$N_n := \exp(\lambda \chi^n), \quad N_{n+1} = N_n^\chi, \quad \chi := \frac{3}{2},$$

avec λ assez grand qui dépend de m, τ, K_j, s_0 , que l'on choisira plus tard. On définit

$$\begin{aligned} v_n &:= -L(u_n)\Phi(u_n) \\ u_{n+1} &:= u_n + S(N_{n+1})v_n \end{aligned}$$

de sorte que $u_n \in X^\infty$ et ainsi $\Phi(u_n) \in X^\infty$ pour tout $n \geq 0$. On veut estimer

$$\varepsilon_n := \|\Phi(u_n)\|_{s_0-m}.$$

Comme

$$\Phi(u_n) = \Phi'(u_n)L(u_n)\Phi(u_n)$$

nous avons

$$\begin{aligned} \Phi(u_{n+1}) &= \Phi(u_n) + \Phi'(u_n)(u_{n+1} - u_n) + \mathcal{Q}(u_n, u_{n+1}) \\ &= \Phi'(u_n)(I - S(N_{n+1}))L(u_n)\Phi(u_n) + \mathcal{Q}(u_n, u_{n+1}). \end{aligned}$$

Cette identité et les estimations

$$\begin{aligned}\|\Phi'(u_n)h\|_{s_0-m} &\leq K_2 \|h\|_{s_0}, \\ \|\mathcal{Q}(u_n, u_{n+1})\|_{s_0-m} &\leq K_3 \|u_{n+1} - u_n\|_{s_0}^2,\end{aligned}$$

nous donnent

$$\|\Phi(u_{n+1})\|_{s_0-m} \leq K_2 \|(I - S(N_{n+1}))L(u_n)\Phi(u_n)\|_{s_0} + K_3 \|S(N_{n+1})L(u_n)\Phi(u_n)\|_{s_0}^2.$$

Ainsi, pour tout $\beta \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\Phi(u_{n+1})\|_{s_0-m} &\leq CN_{n+1}^{-\beta} \|L(u_n)\Phi(u_n)\|_{s_0+\beta} \\ &\quad + CN_{n+1}^{2m+2\tau} \|L(u_n)\Phi(u_n)\|_{s_0-m-\tau}^2,\end{aligned}$$

avec $C = C(\beta, s_0, m, \tau, K_2, K_3)$. Dans la suite nous noterons C plusieurs constantes différentes qui ne dépendent que de β, s_0, m, τ, K_j . Nous écrirons parfois simplement $A \lesssim B$ pour dire qu'il existe une constante C qui ne dépend que de β, s_0, m, τ, K_j telle que $A \leq CB$. Notons que le paramètre β sera choisi en fonction de s_0, m, τ, K_j .

En utilisant l'estimation pour $L(u_n)$ nous trouvons ensuite que

$$\varepsilon_{n+1} \lesssim N_{n+1}^{-\beta} \|\Phi(u_n)\|_{s_0+\beta+\tau} + N_{n+1}^{2m+2\tau} \varepsilon_n^2.$$

L'idée est que la convergence super-rapide du schéma de Newton compense le facteur $N_{n+1}^{2m+2\tau}$ qui provient du caractère non borné de la dérivée de Fréchet et de son inverse. Nous montrerons que si β et λ sont assez grands alors le premier terme vérifie

$$(1.7.7) \quad \|\Phi(u_n)\|_{s_0+\beta+\tau} \leq N_n^\beta$$

de sorte que $N_{n+1}^{-\beta} \|\Phi(u_n)\|_{s_0+\beta+\tau}$ tend vers 0 rapidement car N_n/N_{n+1} tend vers 0 rapidement. Nous démontrons (1.7.7) par récurrence sur n . Pour $n = 0$, la condition (1.7.7) est que

$$(1.7.8) \quad \|\Phi(0)\|_{s_0+\beta+\tau} \leq e^{\lambda\beta},$$

qui est vérifiée pour λ assez grand car $\|\Phi(0)\|_{s_0+\beta+\tau} \leq K_1$. Supposons maintenant (1.7.7) est démontré au rang $n - 1$ avec $n > 0$. Comme

$$\|\Phi(u_n)\|_{s_0+\beta+\tau} \leq K_1(1 + \|u_n\|_{s_0+\beta+\tau+m})$$

l'inégalité triangulaire implique que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_n)\|_{s_0+\beta+\tau} &\leq K_1 \left(1 + \sum_{k=1}^n \|u_k - u_{k-1}\|_{s_0+\beta+\tau+m}\right) \\
&\leq K_1 \left(1 + \sum_{k=1}^n \|S(N_k)L(u_{k-1})\Phi(u_{k-1})\|_{s_0+\beta+\tau+m}\right) \\
&\leq K_1 \left(1 + \sum_{k=1}^n CN_k^{\tau+m} \|L(u_{k-1})\Phi(u_{k-1})\|_{s_0+\beta}\right) \\
&\lesssim 1 + \sum_{k=1}^n N_k^{\tau+m} \|\Phi(u_{k-1})\|_{s_0+\beta+\tau}.
\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence entraîne

$$\|\Phi(u_n)\|_{s_0+\beta+\tau} \lesssim 1 + \sum_{k=1}^n N_k^{\tau+m} N_{k-1}^\beta.$$

Puisque

$$\frac{N_{k+1}}{N_n} \leq \frac{N_{n-1}}{N_n} \leq \left(\frac{1}{N_{n-1}}\right)^{\chi-1} \leq 2^{-n},$$

nous avons

$$\|\Phi(u_n)\|_{s_0+\beta+\tau} \lesssim (1 + n2^{-n})N_n^{\tau+m}N_{n-1}^\beta \leq CN_n^{\tau+m}N_{n-1}^\beta.$$

Maintenant nous vérifions que, si λ et β sont assez grands,

$$(1.7.9) \quad \beta > \frac{\chi(\tau+m)}{\chi-1}, \quad \lambda \geq \frac{\log(C)}{(\chi-1)\beta - \chi(m+\tau)},$$

alors

$$CN_n^{\tau+m}N_{n-1}^\beta = C \exp(\lambda(\chi\tau + \chi m + \beta)\chi^{n-1}) \leq N_n^\beta = \exp(\lambda\beta\chi^n).$$

Ce qui démontre (1.7.7).

Il suit que

$$\varepsilon_{n+1} \leq CN_{n+1}^{-\beta}N_n^\beta + CN_{n+1}^{2m+2\tau}\varepsilon_n^2,$$

avec C qui ne dépend que de $\beta, m\tau, s_0, K_j$. Si les inégalités suivantes sont vraies

$$\frac{\chi-1}{\chi}\beta > \nu > \frac{2\chi}{2-\chi}(m+\tau), \quad \lambda \geq \frac{\log(C)}{(2-\chi)\nu - 2\chi(m+\tau)}, \quad \lambda \geq \frac{\log(C)}{(\chi-1)\beta - \chi\nu},$$

alors on peut démontrer

$$\varepsilon_n \leq N_n^{-\nu}$$

pourvu que $\varepsilon_0 \leq N_0^{-\nu}$. Par définition de ε_0 la dernière condition est vérifiée dès que

$$\|\Phi(0)\|_{s_0-m} \leq e^{-\lambda\nu}.$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Remarque. On peut autoriser les constantes K_1, K_2, K_3, K_4 dans l'hypothèse 1.41 à dépendre de certaines normes de l'inconnue, à la condition que les estimations soient douces au sens de la définition suivante. La définition suivante est celle d'Hamilton.

Définition. Soit F un espace de Fréchet gradué et soit $P: U \subset F \rightarrow F$ une fonction. On dit que P vérifie une estimation douce de degré r et de base b si

$$\|P(f)\|_n \leq C(1 + \|f\|_{n+r})$$

pour tout $f \in U$ et tout $n \geq b$ (avec une constante C qui peut dépendre de n). On dit que P est une application douce si P est définie sur un ensemble ouvert et est continue et satisfait une estimation douce au voisinage de chaque point.

Exemple : l'application $P: u \mapsto u^2$ de $C_b^\infty(\mathbb{R})$ dans lui-même est douce. Notons C^j l'espace des fonctions de classe C^j qui sont bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $k \leq j$. Il suffit de montrer que pour tout j il existe une constante universelle K_j telle que

$$\|u^2\|_{C^j} \leq K_j \|u\|_{C^0} \|u\|_{C^j}.$$

Le fait remarquable est que le membre de droite est linéaire en $\|u\|_{C^j}$. On dit que l'estimation est douce. Cela provient de l'inégalité classique

$$\sup |u^{(i)}| \leq C (\sup |u|)^{1-\frac{i}{j}} (\sup |u| + \sup |u^{(j)}|)^{\frac{i}{j}}.$$

Chapitre 2

Théorèmes de Baire et de Banach

2.1 Théorème de Baire

Définition 2.1. *On dit qu'un espace topologique est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est un sous-ensemble dense. Il est équivalent de dire que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est un ensemble d'intérieur vide.*

Théorème 2.2. (a) *Tout espace métrique complet est un espace de Baire.*

(b) *Tout espace topologique localement compact est un espace de Baire.*

Remarque. Considérons l'espace métrique (\mathbb{Q}, d) où $d(x, y) = |x - y|$. Comme \mathbb{Q} est dénombrable, on voit que \mathbb{Q} est une réunion dénombrable de singletons. Ces singletons sont fermés car un espace métrique est toujours séparé, et que les singletons sont fermés dans un espace séparé. Cependant la réunion, égale à \mathbb{Q} , est d'intérieur non vide. Ceci montre que (\mathbb{Q}, d) n'est pas un espace de Baire. Le résultat peut donc être faux dans un espace métrique qui n'est pas complet.

Démonstration. Nous ne démontrons ici que le point (a) et laissons le point (b) en exercice. Considérons un espace métrique X et une suite $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts denses. Nous voulons montrer que l'intersection $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est un sous-ensemble dense de X . Pour cela il faut montrer que, pour tout ouvert V , l'intersection $V \cap \Omega$ est non-vide. Nous allons démontrer cette propriété en construisant une suite de Cauchy, notée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui convergera par complétude vers un élément de $V \cap \Omega$.

Pour définir le premier terme, nous utilisons le fait que Ω_0 est dense pour déduire que $V \cap \Omega_0$ est non-vide. Ce qui nous permet de choisir un point, noté x_0 , dans $V \cap \Omega_0$. Comme $V \cap \Omega_0$ est ouvert (intersection de deux ouverts), il existe $\rho_0 \in]0, 1]$ tel que $B(x_0, \rho_0) \subset V \cap \Omega_0$. En posant $r_0 = \rho_0/2$, on déduit que $\overline{B(x_0, r_0)} \subset V \cap \Omega_0$. Puis nous

utilisons le fait que Ω_1 est dense pour déduire que $B(x_0, r_0) \cap \Omega_1$ est non vide. On en déduit qu'il existe $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap \Omega_1$ et un rayon $\rho_1 \in]0, 1/2]$ tel que $B(x_1, \rho_1) \subset B(x_0, r_0) \cap \Omega_1$. En posant $r_1 = \rho_1/2$, il vient $\overline{B(x_1, r_1)} \subset \overline{B(x_0, r_0)} \cap \Omega_1$. Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X et une suite de rayons $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)} \cap \Omega_{n+1}, \quad 0 < r_n < \frac{1}{n+1}.$$

Considérons un entier N et deux entiers n, p plus grands que N . Alors x_n et x_p appartiennent à la boule fermée $\overline{B(x_{N-1}, r_{N-1})}$, et donc la distance entre x_n et x_p est majorée par $2r_{N-1}$, ce qui démontre que cette suite est de Cauchy. Elle converge vers un élément x , qui appartient à $\overline{B(x_{N-1}, r_{N-1})}$ pour tout N . On en déduit que x appartient à $V \cap \Omega$, ce qui est le résultat voulu. \square

Pour appliquer le théorème de Baire, nous verrons que l'idée est souvent de trouver une représentation de l'espace tout entier comme une réunion dénombrable de fermés. On obtiendra alors le résultat voulu en utilisant le fait que l'un de ces fermés est d'intérieur non vide. Le résultat le plus simple à démontrer en utilisant ce principe est le suivant.

Proposition. *Un espace de Banach est de dimension finie ou non dénombrable.*

Démonstration. Soit E un espace de Banach admettant une base $(e_n)_{n \in I}$ où I est soit fini, égal à $\{0, \dots, N\}$ pour un certain N , soit $I = \mathbb{N}$. Notons E_n l'espace vectoriel engendré par $(e_i)_{0 \leq i \leq n}$. Alors E_n est un espace vectoriel de dimension finie et donc il est fermé. Comme E est la réunion des ensembles E_n , le théorème de Baire implique que l'un des ensembles E_n , notée E_{n_0} , est d'intérieur non vide. Alors E_{n_0} contient une boule $B(a, r)$. Comme $a \in E_{n_0}$, par translation, on peut se ramener au cas où $a = 0$. Mais alors, si $B(0, r) \subset E_{n_0}$, par homogénéité, on voit que E_{n_0} contient n'importe quelle boule $B(0, Nr)$ avec $N \in \mathbb{N}$. Ce qui implique que $E = E_{n_0}$. \square

Comme premier exemple d'application du théorème de Baire, nous donnons le résultat suivant qui a été à l'origine des travaux de Baire.

Théorème 2.3. *Soit X un espace de Baire et (Y, d) un espace métrique. Considérons une suite de fonctions continues $f_n: X \rightarrow Y$ qui converge simplement vers une fonction $f: X \rightarrow Y$. Alors f est continue sur un ensemble dense.*

Remarque. On peut en déduire que la fonction indicatrice de \mathbb{Q} n'est pas limite simple de fonctions continues. On peut en déduire (exercice) que la dérivée f' d'une fonction f dérivable est continue sur un ensemble dense.

Esquisse de la démonstration. Etant donné deux entiers $N, k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_{N,k} = \bigcap_{n,p \geq N} \left\{ x \in X \mid d(f_n(x), f_m(x)) \leq 1/k \right\}.$$

Alors c'est une intersection d'ensembles fermés, par continuité, ce qui montre que $A_{N,k}$ est fermé. De plus, la convergence simple de la suite f_n implique que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} A_{N,k}$. Alors la réunion $\Omega_k = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} A_{N,k}$ des intérieurs est un ouvert dense (exercice à partir du théorème de Baire). De plus, on montre que f est continue en tout point de $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$. \square

Nous concluons cette section en donnant deux définitions associées au théorème de Baire, qui servent fréquemment lorsque l'on cherche à caractériser la taille d'un ensemble.

Définition 2.4. (a) *On dit qu'une propriété est générique si elle est vérifiée au moins pour tous les éléments d'une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

(b) *On dit qu'un ensemble est maigre au sens de Baire s'il est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

Nous allons montrer qu'un ensemble peut-être maigre et pourtant être de mesure pleine (au sens où le complémentaire est de mesure nulle). L'exemple que nous donnons correspondant à un l'ensemble des nombres diophantiens, qui sont des nombres réels irrationnels qui sont difficiles à approcher par des rationnels.

Définition. *Considérons deux nombres réels K, ν positifs. Un nombre irrationnel ρ est de type (K, ν) si pour tout rationnel p/q ($q > 0$) on a*

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| > \frac{K}{q^\nu}.$$

Un nombre irrationnel ρ est diophantien s'il est de type (K, ν) pour un certain $\nu > 2$.

Proposition. *L'ensemble des nombres irrationnels diophantiens est à la fois maigre au sens de Baire est de mesure de Lebesgue pleine.*

Démonstration. Notons D l'ensemble des nombres diophantiens. Alors

$$D = \left\{ \rho \in \mathbb{R} \mid \exists r \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : \left| \rho - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{nq^r} \right\}.$$

On voit que D est une réunion dénombrable indexée par r et n de fermés qui sont clairement d'intérieur vide (car ces fermés ne peuvent pas contenir de rationnels). Ceci montre que D est maigre au sens de Baire, par définition de cette propriété.

Pour montrer que le complémentaire de D est de mesure nulle, il suffit de montrer que c'est le cas pour $D \cap [0, 1]$. Fixons $\nu > 2$ et introduisons

$$D_\nu = \left\{ \rho \in [0, 1] : \exists K \in \mathbb{R}_+^*, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* / \left| \rho - \frac{p}{q} \right| \geq K/q^\nu \right\}.$$

Le complémentaire est

$$\bigcap_{K>0} \bigcup_{q=1}^{+\infty} \bigcup_{p=0}^q \left] \frac{p}{q} - \frac{K}{q^\nu}, \frac{p}{q} + \frac{K}{q^\nu} \right[.$$

On a

$$\left| \bigcup_{q=1}^{+\infty} \bigcup_{p=0}^q \left] \frac{p}{q} - \frac{K}{q^\nu}, \frac{p}{q} + \frac{K}{q^\nu} \right[\right| \leq 2K \sum_q \frac{q+1}{q^\nu} = O(K)$$

pour $\nu > 2$. Donc le complémentaire de D_ν est une intersection indexée par $K > 0$ d'ensemble de mesure $O(K)$. Il est donc négligeable. \square

2.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Rappelons que l'on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F . C'est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Théorème 2.5 (Banach-Steinhaus). *Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. On considère une famille $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (pas nécessairement dénombrable) d'applications linéaires continues de E dans F qui est simplement bornée, ce qui signifie que*

$$\forall x \in E, \quad \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_F < +\infty.$$

Alors cette famille est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$:

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Démonstration. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, introduisons

$$E_k = \{x \in E \mid \forall \alpha \in A, \|T_\alpha x\|_F \leq k\}.$$

Par hypothèse, chaque élément x de E appartient à l'un de ces ensembles et donc E peut s'écrire comme la réunion des ensembles E_k . De plus chaque ensemble E_k est fermé car c'est une intersection de fermés (on a $E_k = \bigcap_{\alpha \in A} \{x \in E \mid \|T_\alpha x\|_F \leq k\}$ et les applications $x \mapsto \|T_\alpha x\|_F$ sont continues par continuité des applications T_α). Comme la réunion des E_k est d'intérieur non vide, le théorème de Baire implique que l'un au moins des ensembles E_k , notons le E_K , est d'intérieur non vide. Supposons que $B(a, r) \subset E_K$ et considérons $x \in E$ avec $x \neq 0$. Alors l'élément y définit par

$$y = a + \frac{r}{2\|x\|_E} x,$$

appartient à la boule $B(a, r)$. On obtient alors le résultat voulu en écrivant que

$$\|T_\alpha x\|_F = \left\| T_\alpha \left(\frac{2\|x\|_E}{r}(y - a) \right) \right\|_F \leq \frac{2\|x\|_E}{r} (\|T_\alpha y\|_F + \|T_\alpha a\|_F) \leq \frac{2K}{r} \|x\|_E,$$

où l'on a d'abord utilisé l'inégalité triangulaire puis le fait que a et y appartiennent à $B(a, r) \subset E_K$ pour obtenir la seconde inégalité. \square

Corollaire 2.6. *Soient E et F deux espaces de Banach. Considérons une suite (T_n) d'applications linéaires continues qui converge simplement : pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)$ converge vers une limite notée Tx . Alors T est une application linéaire continue.*

Démonstration. Le fait que T est linéaire est évident. L'hypothèse implique que

$$\forall x \in E, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\|_F < +\infty.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus implique qu'il existe une constante C telle que, pour tout $x \in E$, $\|T_n x\|_F \leq C \|x\|_E$. On peut passer à la limite dans cette inégalité pour obtenir que $\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E$, ce qui démontre que T est continue. \square

2.3 Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

Théorème 2.7. *Soient E et F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ une application linéaire continue, bijective de E vers F . Alors l'application réciproque est continue.*

Démonstration. Nous devons montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout y dans F ,

$$\|T^{-1}y\|_E \leq C \|y\|_F.$$

Par linéarité, ceci est équivalent à montrer que

$$T^{-1}(B_F(0, 1)) \subset B_E(0, C).$$

Or, comme T est bijective, on a $T(T^{-1}(B_F(0, 1))) = B_F(0, 1)$. Aussi, il nous suffit de démontrer qu'il existe $C > 0$ telle que $B_F(0, 1) \subset T(B_E(0, C))$. Il est bien sûr équivalent de montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$(2.3.1) \quad B_F(0, \delta) \subset T(B_E(0, 1)).$$

Pour obtenir ce résultat, nous utiliserons le théorème de Baire ainsi que le lemme suivant.

Lemme 2.8. *Si il existe une constante $c > 0$ telle que $B_F(0, c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$, alors $B_F(0, c/2) \subset T(B_E(0, 1))$.*

Démonstration. Soit $y \in B_F(0, c)$. Alors y appartient à $\overline{T(B_E(0, 1))}$. Par conséquent, il existe $y_0 \in T(B_E(0, 1))$ tel que $\|y - y_0\|_F \leq c/2$. Par homogénéité, l'hypothèse du lemme implique que $B_F(0, c/2) \subset \overline{T(B_E(0, 1/2))}$. On peut donc trouver $y_1 \in T(B_E(0, 1/2))$ tel que $\|y - y_0 - y_1\|_F \leq c/4$. En procédant par récurrence, on définit une suite (y_n) telle que

$$y_n \in T(B_E(0, 2^{-n}c)) \quad \text{et} \quad \|y - y_0 - \dots - y_n\|_F \leq 2^{-n-1}c.$$

Soit $x_n \in B_E(0, 2^{-n})$ tel que $y_n = Tx_n$. Comme $\|x_n\|_E < 2^{-n}$, la série $\sum x_n$ converge normalement et donc converge car E est un espace de Banach. La limite de cette série, notée z , est de norme strictement plus petite que 2 et vérifie $y = Tz$. On a montré que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 2))$, ce qui implique le résultat voulu par linéarité. \square

D'après ce qui précède, pour conclure la démonstration, il reste uniquement à montrer qu'il existe $c > 0$ telle que $B_F(0, c) \subset \overline{T(B_E(0, 2))}$; on obtient alors le résultat voulu (2.3.1) avec $\delta = c/4$. Pour cela nous allons appliquer le théorème de Baire avec la suite de fermés F_n définis par $F_n = \overline{T(B_E(0, n))}$. Alors on a

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Le théorème de Baire implique que l'un des fermés est d'intérieur non vide. Comme $F_n = n\overline{T(B_E(0, 1))}$, on en déduit qu'il existe un élément $y_0 \in F$ et un nombre c positif tels que $B_F(y_0, c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$. Par symétrie, $-y_0$ appartient aussi à $\overline{T(B_E(0, 1))}$. Il suit que $B_F(0, c) \subset \overline{T(B_E(0, 2))}$. Ce qui conclut la démonstration du théorème. \square

Corollaire 2.9 (Equivalence des normes). *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose que E est un espace de Banach pour ces deux normes. Supposons de plus qu'il existe une constante C telle que*

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq C \|x\|_2.$$

Alors il existe une constante C' telle que,

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_2 \leq C' \|x\|_1.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de l'isomorphisme de Banach à l'application identité, de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$. \square

Définition 2.10. *Considérons deux espaces vectoriel normés E et F et une application linéaire $T: E \rightarrow F$. Par définition, le graphe de T est le sous-ensemble noté $G(T)$ de $E \times F$ défini par*

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F \mid y = Tx\}.$$

Théorème 2.11 (Théorème du graphe fermé). *Soient E et F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.*

Démonstration. Supposons que T est continue. Alors $G(T)$ est un ensemble fermé. En effet, si (x, y) appartient à l'adhérence de $G(T)$, alors il existe une suite (x_n) qui converge vers x et telle que Tx_n converge vers y . Par continuité on a $y = Tx$ et donc $(x, y) \in G(T)$. Ce qui démontre que $G(T) = \overline{G(T)}$.

Il reste à démontrer que si le graphe de T est fermé, alors T est continue. Pour cela, introduisons l'application $N: E \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$N(x) = \|x\|_E + \|Tx\|_F.$$

Alors on vérifie facilement que c'est une norme sur E . Montrons que E , muni de cette nouvelle norme, est un espace de Banach. Considérons une suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour la norme N . Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Donc il existe $x \in E$ et $y \in F$ tels que $\|x_n - x\|_E$ et $\|Tx_n - y\|_F$ convergent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme le graphe de T est fermé par hypothèse, on en déduit que $y = Tx$. Ceci démontre que $N(x_n - x)$ tend vers 0, et donc E est un espace de Banach pour la norme N .

L'application identité de $(E, N(\cdot))$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$ est continue car, par définition de N , on a $\|x\|_E \leq N(x)$. De plus l'identité est trivialement bijective. Le théorème de l'application ouverte implique que sa réciproque est aussi continue. Cela entraîne l'existence d'une constante C telle que $N(x) \leq C\|x\|_E$ pour tout x dans E . Ce qui, par définition de N , implique que $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$. Ceci démontre que T est continue, ce qui conclut la démonstration. \square

2.4 Exemples d'applications

Proposition 2.12. *Soient X un espace topologique compact. Toutes les normes sur $C^0(X)$ qui rendent $C^0(X)$ complet et entraînent la convergence simple sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme qui rend $C^0(X)$ complet et qui entraîne la convergence simple. On note E le couple $(C^0(X), \|\cdot\|)$ et Λ_x l'application linéaire de E vers \mathbb{R} définie par

$$\Lambda_x(f) := f(x).$$

Démontrons que pour tout x dans E l'application Λ_x est continue. En effet, si $\|f_n\|$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors par hypothèse on a également convergence

simple, donc $f_n(x)$ converge aussi vers 0, et par définition de Λ_n , ceci implique que la suite $(\Lambda_x(f_n))$ converge vers 0.

La famille $\mathcal{F} := \{ \Lambda_x \mid x \in X \}$ est simplement borné. En effet, pour tout x dans X et tout f appartenant à E ,

$$|\Lambda_x(f)| = |f(x)| \leq \sup_{y \in X} |f(y)| < +\infty,$$

où l'on a utilisé le fait que $f(X)$ est un compact de \mathbb{R} pour obtenir la dernière majoration.

Ainsi le théorème de Banach-Steinhaus assure que la famille \mathcal{F} est uniformément bornée dans l'espace des applications linéaires continues de E vers \mathbb{R} . Ce qui se traduit par l'existence d'une constante C telle que :

$$\forall x \in X, \forall f \in E, |f(x)| = |\Lambda_x(f)| \leq \|\Lambda_x\|_{\mathcal{L}(E)} \|f\| \leq C \|f\|.$$

Et donc,

$$\|f\|_\infty := \sup_{y \in X} |f(y)| \leq C \|f\|.$$

On complète la démonstration en utilisant la complétude de E et le corollaire du théorème de l'application ouverte qui énonce que deux normes sur un espace de Banach sont équivalentes dès que l'une domine l'autre. \square

Le résultat suivant est très utile. Il montre que toute inclusion entre deux sous-espaces vectoriels complets continûment inclus dans $L^1_{loc}(\Omega)$ est en fait une inclusion continue (au sens où l'injection canonique est continue).

Proposition 2.13. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soient E et F deux sous-espaces vectoriels de l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$. On suppose que E et F sont munis respectivement de normes $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$ qui les rendent complets et telles que toute suite (f_n) convergente vers 0 pour $\|\cdot\|_E$ (resp. pour $\|\cdot\|_F$) converge vers 0 dans $L^1_{loc}(\Omega)$ au sens suivant : pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int f_n(x)\varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors, si $E \subset F$, il existe $C > 0$ telle que $\|u\|_F \leq C \|u\|_E$ pour tout $u \in E$.

Démonstration. À faire en exercice en utilisant le théorème du graphe fermé. \square

Chapitre 3

Analyse Hilbertienne

3.1 Introduction aux espaces de Hilbert

Dans toute cette section, \mathbb{K} désignera soit \mathbb{R} soit \mathbb{C} et nous noterons \bar{z} le complexe conjugué de z . Nous souhaitons considérer des espaces de Hilbert réels ou complexes et nous rédigerons les définitions et les démonstrations de sorte qu'elles s'appliquent aussi bien au cas réel qu'au cas complexe.

3.1.1 Produit scalaire

Considérons un \mathbb{K} -espace vectoriel H . Par définition, un produit scalaire est une application de $H \times H$ dans \mathbb{K} , notée (\cdot, \cdot) , telle que, pour tout $x, y, z \in H$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(a) $(x, x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$;

(b) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(c) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.

De (b) et (c) on déduit que $(z, \lambda x + \mu y) = \bar{\lambda}(z, x) + \bar{\mu}(z, y)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors bien sûr $\overline{(y, x)} = (y, x)$ et de même $\bar{\lambda} = \lambda$ (comme nous l'avons mentionné, nous rédigeons les définitions et les démonstrations de sorte qu'elles s'appliquent aussi bien au cas réel qu'au cas complexe).

Théorème 3.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Supposons que (\cdot, \cdot) est un produit scalaire sur H . Pour tout $x, y \in H$,*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

Démonstration. Etant donné un élément quelconque x de H , nous noterons $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ de module 1 et x, y deux éléments de H . On vérifie que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x \|y\| - \lambda \|x\| y \right\|^2 = 2 \|x\|^2 \|y\|^2 - \|x\| \|y\| ((x, \lambda y) - (\lambda y, x)) \\ &= 2 \|x\| \|y\| \left(\|x\| \|y\| - \operatorname{Re}(x, \lambda y) \right). \end{aligned}$$

Puis on choisit λ de sorte que $\operatorname{Re}(x, \lambda y) = |(x, y)|$, ce qui implique le résultat voulu. \square

Corollaire 3.2. *Supposons que (\cdot, \cdot) est un produit scalaire sur H . Alors l'application $\|\cdot\| : H \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ est une norme sur H . On appelle cette norme la norme induite par le produit scalaire. De plus cette norme vérifie l'identité dite du parallélogramme : pour tout x, y dans H , on a*

$$(3.1.1) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2.$$

Démonstration. On a directement que $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ et que $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in H$. Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire. Pour cela on écrit que

$$\|x + y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

d'où $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. L'identité (3.1.1) s'obtient directement en écrivant que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y),$$

puis en développant le membre de droite. \square

Remarquons que le produit scalaire est continu de $(H, \|\cdot\|)$ dans \mathbb{K} . Cela se déduit directement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 3.3. *Par définition, un espace de Hilbert est un \mathbb{K} -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) , qui est complet pour la norme associée (définie par $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$).*

Proposition 3.4. *Considérons un espace de Hilbert H . Toute partie $A \subset H$ qui est convexe et fermée admet un unique élément de norme minimale.*

Démonstration. Considérons une suite (x_n) d'éléments de A telle que $\|x_n\|$ converge vers $\delta := \inf_{x \in A} \|x\|$. Comme A est convexe, pour tout entiers n, m , le milieu $(x_n + x_m)/2$ appartient à A et donc $\|(x_n + x_m)/2\| \geq \delta$. L'identité du parallélogramme implique que

$$\|(x_n - x_m)/2\|^2 + \delta^2 \leq \|(x_n - x_m)/2\|^2 + \|(x_n + x_m)/2\|^2 = \frac{1}{2} \|x_n\|^2 + \frac{1}{2} \|x_m\|^2.$$

Le membre de droite de l'inégalité converge vers δ^2 quand n et m tendent vers $+\infty$. On en déduit que $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Ainsi (x_n) est une suite de Cauchy, qui converge par complétude de H . La limite appartient à A car A est fermée. Ceci démontre l'existence d'un élément de norme minimale, et l'unicité se déduit à nouveau de l'identité du parallélogramme. \square

3.1.2 Orthogonalité

Soit H un espace de Hilbert. On dit que deux vecteurs x, y sont orthogonaux si $(x, y) = 0$. On note alors $x \perp y$. On note $\{x\}^\perp$ l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à x . Plus généralement, si F est un sous-espace quelconque de H , on pose

$$F^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in F, (x, y) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé. De plus, de la continuité de $y \mapsto (x, y)$ on déduit facilement que $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.

Théorème 3.5. *i) Soit F un sous-espace fermé de H . Il existe une application linéaire $P_F: H \rightarrow F$ telle que $\|x - P_F(x)\| = \text{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.*

ii) On a $x - P_F(x) \in F^\perp$.

Démonstration. *i)* Soit $x \in H$. Notons $A_x = F - \{x\} = \{y - x \mid y \in F\}$. Alors A_x est un ensemble convexe. La proposition 3.4 implique qu'il existe un unique vecteur $z \in A_x$ de norme minimale. On définit $P_F(x)$ par $P_F(x) = z + x$, de sorte que $P_F(x) \in F$ et

$$\|x - P_F(x)\| = \|z\| = \inf_{y \in F} \|y - x\| = \text{dist}(x, F).$$

ii) Soit $y \in F$ non nul. Nous voulons montrer que $x - P_F(x)$ est orthogonal à y . Pour cela considérons $\lambda \in \mathbb{K}$ (à choisir ultérieurement) et écrivons que, par définition de $P_F(x)$ via un argument de minimisation,

$$\|P_F(x) - x - \lambda y\|^2 \geq \|P_F(x) - x\|^2.$$

En développant le membre de gauche, on en déduit que

$$|\lambda|^2 \|y\|^2 - 2 \text{Re}(P_F(x) - x, \lambda y) \geq 0.$$

On choisit ensuite $\lambda \neq 0$ de sorte que $|\lambda|^2 \|y\|^2 - 2 \text{Re}(P_F(x) - x, \lambda y) = -|\lambda| |(P_F(x) - x, y)|$ (on vérifiera facilement que c'est possible) pour en déduire que $|(P_F(x) - x, y)| = 0$ ce qui implique que y est orthogonal à $P_F(x) - x$. \square

Corollaire 3.6. *i) Si F est un sous-espace fermé, alors $H = F \oplus F^\perp$.*

ii) Si F est un sous-espace vectoriel quelconque de H , alors $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

iii) Soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel quelconque. Alors F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Théorème 3.7 (Théorème de Riesz-Fréchet). *Soient H un espace de Hilbert et H' son dual topologique. Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, \quad \varphi(v) = (v, f).$$

Démonstration. Étant donné $f \in H$, on note $\Theta_f: H \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par $\Theta_f(v) = (v, f)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $|\Theta_f(v)| = |(v, f)| \leq \|v\| \|f\|$ ce qui montre que Θ_f est une forme linéaire continue sur H . Soit $\varphi \in H'$. On veut montrer qu'il existe $v \in H$ tel que $\varphi = \Theta_f$. Si $\varphi = 0$ alors le résultat est trivialement vérifié avec $f = 0$.

Supposons que $\varphi \neq 0$ et introduisons $F = \ker \varphi$, qui est un sous-espace fermé par continuité de φ . Le corollaire précédent implique que $H = F \oplus F^\perp$. Montrons que F^\perp est de dimension 1. Pour cela considérons deux vecteurs x, y non nuls dans F^\perp . Comme $F \cap F^\perp = \{0\}$ et que $x \neq 0$ par hypothèse, on a $x \notin F = \ker \varphi$ ce qui implique que $\varphi(x) \neq 0$. On peut alors écrire que

$$\varphi \left(y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} x \right) = 0,$$

ce qui implique que le vecteur $y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} x$ appartient à $\ker \varphi = F$. Par ailleurs ce vecteur appartient à F^\perp car x et y sont dans le sous-espace F^\perp . En réutilisant que $F \cap F^\perp = \{0\}$, on en déduit que ce vecteur est nul, ce qui prouve que F^\perp est de dimension 1.

Pour démontrer qu'il existe $f \in F^\perp$ tel que $\varphi = \Theta_f$, il reste juste à choisir f dans F^\perp tel que $\varphi(f) = \|f\|^2$. En effet, avec ce choix, φ et Θ_f sont nulles donc coïncident sur F . Et par ailleurs ces deux applications coïncident aussi sur F^\perp car elles sont égales au point $f \in F^\perp$ et que F^\perp est de dimension 1. Alors $\varphi = \Theta_f$ sur $H = F \oplus F^\perp$. \square

Définition 3.8. *Considérons une suite (x_n) d'éléments d'un espace de Hilbert H . On dit que cette suite converge faiblement vers $x \in H$ si, pour toute forme linéaire continue $\varphi \in H'$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n - x) = 0.$$

D'après le théorème précédent, il est équivalent de dire que (x_n) converge faiblement vers x si, pour tout $y \in H$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y, x_n) = (y, x).$$

On note alors $x_n \rightharpoonup x$.

La convergence forte implique la convergence faible :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup x.$$

Par ailleurs, le théorème de Banach-Steinhaus implique toute suite faiblement convergente est bornée.

Les deux résultats qui vont suivre expliquent l'intérêt fondamental de la convergence faible : il y a des suites qui admettent des sous-suites faiblement convergentes alors qu'elles n'admettent aucune sous-suite fortement convergente.

Proposition 3.9. *Considérons un espace vectoriel H de dimension infinie qui est muni d'un produit scalaire (on dit que H est un espace pré-hilbertien). Alors la boule unité fermée n'est pas compacte.*

Démonstration. Nous rappellerons ci-dessous le principe d'orthonormalisation qui permet ici de construire une suite d'éléments (e_n) de H telle que $(e_n, e_m) = 1$ si $n = m$ et 0 sinon. Alors, si $n \neq m$, on a $\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2$. Cette suite ne peut donc pas admettre une sous-suite qui soit de Cauchy. \square

Théorème 3.10. *Soit H un espace de Hilbert. Alors, toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ bornée d'éléments de H possède une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la suite de terme général (x_0, x_n) est bornée dans \mathbb{K} et donc elle admet une sous-suite convergente. En réutilisant cet argument, on construit une suite de fonctions $\varphi_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $((x_k, x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{K} .

On pose $y_n = x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n)}$ et on va montrer que cette sous-suite converge faiblement. Par linéarité, pour tout v dans l'espace vectoriel E engendré par $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, la suite de terme général (v, y_n) converge vers un élément $U(v)$ de \mathbb{K} . On vérifie que U est une forme linéaire sur \overline{E} à valeurs dans \mathbb{K} , qui est bornée car $|(v, y_n)| \leq M \|v\|$ où $M = \sup \|x_n\|$. L'espace \overline{E} muni du produit scalaire de H est un espace de Hilbert, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de représentation de Riesz dans cet espace pour conclure qu'il existe $x \in \overline{E}$ tel que $U(v) = \lim (v, y_n) = (v, x)$ pour tout $v \in \overline{E}$.

Par ailleurs, si $v \in \overline{E}^\perp$, alors $v \in E^\perp$ d'où $(v, y_n) = 0$. Donc, pour tout $v \in \overline{E} \oplus \overline{E}^\perp$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v, y_n) = (v, x).$$

Comme \overline{E} est fermé, on a $H = \overline{E} \oplus \overline{E}^\perp$ et ce qui précède montre que la sous-suite (y_n) converge vers x faiblement. \square

3.2 Bases hilbertiennes

Une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H est appelée un système orthonormal si et seulement si

$$(e_n, e_m) = \delta_n^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

où δ_n^m vaut 1 si $n = m$ et 0 sinon.

Proposition 3.11. *Soit H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Considérons une famille finie ou dénombrable $(u_n)_{n \in I}$ de vecteurs linéairement indépendants. Alors il*

existe un système orthonormal $(e_n)_{n \in I}$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\text{Vect}\{e_0, \dots, e_N\} = \text{Vect}\{u_0, \dots, u_N\}.$$

Démonstration. On pose $e_0 = u_0 / \|u_0\|$ et on définit les éléments suivants par récurrence, de sorte que

$$e_n = v_n / \|v_n\| \quad \text{où} \quad v_n = u_n - (u_n, e_0)e_0 - \dots - (u_n, e_{n-1})e_{n-1}.$$

On vérifie en effet que e_n est orthogonal à $\text{Vect}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$. □

Lemme 3.12 (Inégalité de Bessel). *Considérons un système orthonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f un élément de H . Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Démonstration. Posons $S_N f = \sum_{n=0}^N (f, e_n)e_n$. On a

$$\|S_N f\|^2 = \sum_{0 \leq n_1, n_2 \leq N} (f, e_{n_1}) \overline{(f, e_{n_2})} (e_{n_1}, e_{n_2}) = \sum_{n=0}^N |(f, e_n)|^2.$$

On en déduit que

$$(f, S_N f) = \sum_{n=0}^N (f, (f, e_n)e_n) = \sum_{n=0}^N |(f, e_n)|^2 = \|S_N f\|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que $\|S_N f\|^2 \leq \|f\| \|S_N f\|$ d'où $\|S_N f\| \leq \|f\|$. □

Théorème 3.13. *Considérons un espace de Hilbert H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *l'espace vectoriel engendré par les $\{e_n\}$ est dense dans H .*

ii) *Pour tout $f \in H$, $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(f, e_n)|^2$.*

iii) *Pour tout $f \in H$, la série $\sum (f, e_n)e_n$ converge vers f .*

iv) *Si $f \in H$ vérifie $(f, e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = 0$.*

Démonstration. Les implications iii) \Rightarrow i) et iii) \Rightarrow iv) sont triviales. Démontrons que ii) \Rightarrow iii). Pour cela on utilise l'identité déjà vue $(f, S_N f) = \|S_N f\|^2$ pour déduire que

$$\|f - S_N f\|^2 = \|f\|^2 + \|S_N f\|^2 - 2 \text{Re}(f, S_N f) = \|f\|^2 - \|S_N f\|^2,$$

ce qui implique

$$(3.2.1) \quad \left\| f - \sum_{n=0}^N (f, e_n) e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N |(f, e_n)|^2.$$

Cela entraîne que $f - \sum_{n=0}^N (f, e_n) e_n$ converge vers 0 si $\sum_{n=0}^N |(f, e_n)|^2$ converge vers $\|f\|^2$.

Considérons l'implication $i) \Rightarrow ii)$. Posons comme précédemment $S_N f = \sum_{n=0}^N (f, e_n) e_n$ et rappelons que $\|S_N f\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in H$. Soit E l'espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $f' \in E$ tel que $\|f - f'\| < \varepsilon$. Pour N assez grand on a $S_N f' = f'$. Par ailleurs

$$\|S_N f - S_N f'\| = \|S_N(f - f')\| \leq \|f - f'\| \leq \varepsilon,$$

donc

$$\|S_N f - f\| \leq \|S_N f - S_N f'\| + \|S_N f' - f'\| + \|f' - f\| \leq \varepsilon + 0 + \varepsilon$$

donc $(f - S_N f)$ converge vers 0. Maintenant on peut passer à la limite dans (3.2.1) et on obtient $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(f, e_n)|^2$, ce qui conclut la démonstration de $i) \Rightarrow ii)$.

Montrons que $iv) \Rightarrow iii)$ (c'est ici que l'on utilise le fait que H est complet). Posons $a_n = (f, e_n)$ et $f_p = \sum_{n=1}^p a_n e_n$. L'inégalité de Bessel entraîne que $(a_n) \in \ell^2$. Maintenant, pour $m > p$ on a $\|f_m - f_p\|^2 = \sum_{n=p+1}^m |a_n|^2$ et donc la suite (f_p) est de Cauchy et converge vers un élément noté f' . Mais alors (en considérant les sommes partielles et en passant à la limite) on trouve que $(f', e_n) = a_n$ pour tout n , ce qui entraîne que $(f - f', e_n) = 0$ pour tout n . On en déduit que $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, ce qui conclut la démonstration. \square

Chapitre 4

Dualité (à rédiger)

4.1 Théorème de Hahn-Banach (à rédiger)

Théorème 4.1 (Forme analytique).

Corollaire 4.2. *Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} et considérons un élément non nul u dans E . Alors il existe une forme linéaire continue $\ell \in E^*$ telle que $\|\ell\| = 1$ et $\ell(u) = \|u\|_E$. En particulier,*

$$\|u\|_E = \sup_{\ell \in E^*, \|\ell\|=1} |\ell(u)|.$$

De plus l'application $J: E \rightarrow (E^)^*$ définie par $J(u)(\ell) = \ell(u)$ est une isométrie de E dans E^{**} .*

Corollaire 4.3. *Soit E un espace vectoriel normé réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E et ℓ une forme linéaire continue sur F . Alors il existe $\tilde{\ell} \in E^*$ qui prolonge ℓ et telle que*

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} |\tilde{\ell}(x)| = \sup_{x \in F, \|x\|_E \leq 1} |\ell(x)|.$$

Corollaire 4.4. *Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} et F un sous-espace vectoriel fermé. Considérons un élément u de E n'appartenant pas à F . Alors il existe une forme linéaire continue $\ell \in E^*$ qui s'annule sur F et telle que $\ell(u) = 1$.*

Corollaire 4.5. *Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} et F un sous-espace vectoriel. Alors F est dense dans E si et seulement si la seule forme linéaire continue qui s'annule sur F est la forme nulle.*

Théorème 4.6 (Hahn-Banach forme géométrique). *Soit E un espace vectoriel normé réel et A, B deux sous-ensembles convexes, non vides et disjoints.*

i) On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare A et B au sens large. Cela signifie qu'il existe une forme linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle telle que

$$\sup_A f \leq \inf_B f.$$

ii) On suppose que A est fermé et B est compact. Alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare A et B au sens strict. Cela signifie qu'il existe une forme linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle telle que

$$\sup_A f < \inf_B f.$$

4.2 Topologies faibles

Dans tout ce chapitre, $(E, \|\cdot\|_E)$ désigne un espace de Banach réel. On note E^* le dual topologique qui est l'ensemble des formes linéaires $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Rappelons que E^* est muni de la norme $\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)|$ et que c'est un espace de Banach pour cette norme (en fait, E^* est un espace de Banach pour tout espace normé E ; la complétude de E^* provient du fait que \mathbb{R} est complet).

Nous allons nous intéresser à deux topologies sur E et E^* , appelées respectivement topologie faible et topologie faible-*. Notre but est de présenter la version la plus simple de cette théorie. Ainsi nous allons considérer un point de vue séquentiel (où l'on s'intéresse à la convergence des suites). Néanmoins, afin d'être complet et pour permettre de revoir des notions de topologie, nous décrirons dans cette introduction comment définir ces topologies à l'aide de la notion de topologie engendrée.

Considérons un ensemble X et une collection $\{\mathcal{T}_\beta\}_{\beta \in B}$ de topologies sur X . C'est-à-dire que, pour tout $\beta \in B$, \mathcal{T}_β est une collection de sous-ensembles de X vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) \mathcal{T}_β contient l'ensemble vide et l'ensemble X ,
- (ii) toute union d'éléments de \mathcal{T}_β appartient à \mathcal{T}_β ,
- (iii) toute intersection finie d'éléments de \mathcal{T}_β appartient à \mathcal{T}_β .

Notons $\mathcal{T} = \bigcap_{\beta \in B} \mathcal{T}_\beta$. On vérifie que \mathcal{T} est une topologie sur X . Cette remarque permet de définir la topologie engendrée par une collection de parties de X de la façon suivante : pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, considérons l'ensemble $\text{Top}(\mathcal{A})$ des topologies sur X qui contiennent \mathcal{A} , alors la topologie engendrée par \mathcal{A} , notée $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ est définie par $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{T} \in \text{Top}(\mathcal{A})} \mathcal{T}$. Cette notion est bien défini car $\text{Top}(\mathcal{A})$ est non vide pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. En effet, $\mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X donc $\mathcal{P}(X) \in \text{Top}(\mathcal{A})$ pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Il suit directement de cette définition que $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ est la topologie la moins fine contenant \mathcal{A} (ce qui veut dire

que c'est la plus petite topologie au sens de l'inclusion). Dans le chapitre de topologie, nous avons vu que $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ est constituée de l'ensemble vide, de X et de toutes les réunions d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} .

La notion de topologie engendrée permet de définir la notion de topologie engendrée par une famille d'applications. C'est la topologie la moins fine (la plus petite) qui rende continue une famille d'applications données. Précisément, considérons un ensemble X et $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow Y\}_{\alpha \in A}$ une famille d'applications de X vers un espace topologique \mathcal{Y} dont la topologie est notée $\mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$. Par définition, la topologie engendrée par \mathcal{F} sur X est égale à la topologie engendrée $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ par la collection

$$\mathcal{A} := \{ f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A, U_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{Y}} \}.$$

Définition 4.7. *Considérons un espace vectoriel normé E . Notons E^* le dual topologique de E et E^{**} le dual topologique de E^* .*

- i) La topologie faible sur E , notée $\sigma(E, E^*)$, est la topologie engendré par E^* .*
- ii) La topologie faible sur E^* , notée $\sigma(E^*, E^{**})$, est la topologie engendré par E^{**} .*
- iii) Etant donné $x \in E$, notons J_x la forme linéaire de E^* dans \mathbb{K} définie par $J_x(f) = f(x)$. La topologie faible-* sur E^* , notée $\sigma(E^*, E)$, est la topologie engendrée par la famille $\mathcal{F} = \{J_x \mid x \in E\}$.*

Définition 4.8. *Considérons un espace vectoriel normé E . Alors E est réflexif si et seulement si l'application $J : x \mapsto J_x$ est un isomorphisme de E vers $E^{**} = (E^*)^*$.*

Remarque. *i) Comme le dual d'un espace vectoriel normé est toujours complet, un espace réflexif est nécessairement un espace de Banach.*

ii) Notons qu'il existe un espace de Banach qui est isomorphe à son bi-dual sans être réflexif (contre-exemple dû à James). Ceci montre que pour définir la réflexivité, il faut faire intervenir l'application J ci-dessus.

Etant donné deux topologies \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sur un même ensemble X , rappelons que l'on dit que \mathcal{T}_2 est plus fine que \mathcal{T}_1 si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Il suit directement de la définition des topologies faibles que l'on a les comparaisons suivantes.

Proposition 4.9. *Soit E un espace vectoriel normé. La topologie faible est moins fine que la topologie forte et la topologie faible-* est moins fine que la topologie faible, c'est-à-dire*

$$\sigma(E, E^*) \subset \mathcal{T}(\|\cdot\|_E), \quad \sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**}),$$

où l'on a noté $\mathcal{T}(\|\cdot\|_E)$ la topologie induite sur E par la structure d'espace normé.

Remarque. En général, les topologies $\sigma(E^*, E^{**})$ et $\sigma(E^*, E)$ sont différentes.

Proposition 4.10. *La topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est séparée.*

Démonstration. Considérons x, y dans E avec $x \neq y$. Comme $\{x\}$ est fermé et $\{y\}$ est compact, d'après le corollaire du théorème de Hahn-Banach géométrique, il existe une forme linéaire continue $f \in E^*$ telle que $f(x) < f(y)$. On pose $h = (f(x) + f(y))/2$ et on introduit $U = f^{-1}(]-\infty, h[)$ et $V = f^{-1}(]h, +\infty[)$. Par définition de la topologie faible, ceux sont deux ouverts faibles. Ils sont disjoints et on a par construction $x \in U$ et $y \in V$. \square

4.3 Exemple : le cas des espaces de Lebesgue

Nous avons déjà vu que tout espace de Hilbert peut être identifié à son dual. Rappelons l'énoncé du théorème 3.7.

Théorème 4.11. *Considérons un espace de Hilbert H muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . Pour toute forme linéaire continue $\varphi \in H^*$, il existe un unique $g \in H$ tel que*

$$\forall u \in H, \quad \varphi(u) = (u, g).$$

L'exemple fondamental est celui de l'espace $L^2(\Omega)$. Dans ce cas, le résultat précédent implique que pour toute forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$, il existe $f \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall u \in L^2(\Omega), \quad \varphi(u) = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx.$$

Le théorème suivant est un résultat général, fondamental, que l'on admet. Il généralise la discussion précédente aux espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour tout exposant p dans $[1, +\infty[$.

Théorème 4.12. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $1 \leq p < +\infty$ et $p' = p/(p-1)$ l'exposant conjugué de p . Pour toute forme linéaire continue $\Lambda: L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique élément $f \in L^{p'}(\Omega)$ tel que, pour tout $u \in L^p(\Omega)$,*

$$\Lambda(u) = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx.$$

De plus $\|\Lambda\|_{(L^p)^} = \|f\|_{L^{p'}}$.*

Remarque. *i) On en déduit que l'application $f \mapsto \Theta_f$ définie par $\Theta_f(u) = \int_{\Omega} fu dx$ est une isométrie bijective de $L^{p'}(\Omega)$ dans $(L^p(\Omega))^*$. Ceci implique que $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif. De plus cet espace est séparable.*

ii) Ce résultat reste vrai si on remplace Ω muni de la mesure de Lebesgue par un espace mesuré (X, μ) qui est σ -fini (c'est-à-dire que X peut s'écrire comme la réunion d'une suite dénombrable d'ensembles de mesure finie).

Notons que le théorème précédent montre que $L^\infty(\Omega)$ est le dual de $L^1(\Omega)$.

Proposition 4.13. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors Θ_f est une forme linéaire continue sur $L^\infty(\mathbb{R})$, ce qui implique que $L^1(\mathbb{R}) \subset (L^\infty(\mathbb{R}))^*$. Mais $(L^\infty(\mathbb{R}))^*$ est strictement plus gros que $L^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Le premier point se montre directement. Pour démontrer que $(L^\infty(\mathbb{R}))^*$ est strictement plus gros que $L^1(\mathbb{R})$, introduisons le sous-espace

$$F = \left\{ u \in C^0(\mathbb{R}) \mid u \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \text{ et } u \text{ admet une limite en } +\infty \right\}.$$

Introduisons aussi l'application linéaire $\ell: V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\ell(u) = \lim_{+\infty} u$. On a $|\ell(u)| \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, et donc on peut utiliser le théorème de Hahn-Banach sous forme analytique pour étendre ℓ en une forme linéaire continue $\tilde{\ell}$ sur $L^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que l'on puisse écrire $\tilde{\ell} = \Theta_f$ avec $f \in L^1(\mathbb{R})$ et montrons que l'on obtient alors une absurdité. Pour cela, donnons nous maintenant une fonction $\xi \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors les fonctions $\cos(x\xi) \exp(-\varepsilon x^2)$ et $\sin(-x\xi) \exp(-\varepsilon x^2)$ appartiennent à V et sont de limite nulle à l'infini. Il suit que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(x\xi) e^{-\varepsilon x^2} dx = \Theta_f(\cos(x\xi) e^{-\varepsilon x^2}) = \tilde{\ell}(\cos(x\xi) e^{-\varepsilon x^2}) = \ell(\cos(x\xi) e^{-\varepsilon x^2}) = 0$$

et on a un résultat analogue en remplaçant $\cos(x\xi) \exp(-\varepsilon x^2)$ par $\sin(-x\xi) \exp(-\varepsilon x^2)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-ix \cdot \xi - \varepsilon x^2) dx = 0.$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et faire tendre ε vers 0. On obtient que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-ix \cdot \xi) dx = 0.$$

Pour conclure nous utilisons le théorème d'unicité de Fourier (qui sera vu plus loin) et dont nous donnons ici l'énoncé : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\int e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, alors $f = 0$. Il suit que ℓ est identiquement nulle, ce qui est absurde. \square

4.4 Convergence faible et convergence faible étoile

A. Convergence faible

Définition 4.14. *i) Soit (x_n) une suite de points de E . On dit que cette suite converge fortement vers $x \in E$ si $\|x_n - x\|_E$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par soucis de concision, on dit souvent simplement que la suite (x_n) converge vers x et on le note $x_n \rightarrow x$.*

ii) Soit (x_n) une suite de points de E . On dit que cette suite converge faiblement vers x si, pour tout f dans E^* , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans \mathbb{K} . On le note $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 4.15. Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace de Banach E et soit $x \in E$. On a alors les propriétés suivantes.

- i) Si (x_n) converge fortement vers x alors (x_n) converge aussi faiblement vers x .
- ii) La suite (x_n) converge vers x pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x ($x_n \rightharpoonup x$).
- iii) Si (x_n) converge faiblement vers x et vers x' , alors $x = x'$.
- iv) Si (x_n) converge faiblement vers x , alors la suite (x_n) est bornée dans E et

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_E.$$

Démonstration. i) Si $x_n \rightarrow x$, alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$ pour tout $f \in E^*$ et donc $x_n \rightharpoonup x$.

ii) Supposons que (x_n) converge vers x pour la topologie $\sigma(E, E^*)$. Soit $f \in E^*$. Comme f est continue pour la topologie faible (par définition de la topologie faible), on a $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Ce qui montre que $x_n \rightharpoonup x$. Réciproquement, supposons que $x_n \rightharpoonup x$. Considérons un voisinage de x pour la topologie faible. On peut supposer que ce voisinage est de la forme $U = \bigcap_{1 \leq i \leq N} f_i^{-1}(V_i)$ où V_i est un voisinage ouvert de $f_i(x)$. Pour tout i , il existe un entier N_i tel que x_n appartient à $f_i^{-1}(V_i)$ pour $N \geq N_i$. Donc pour tout n plus grand que le maximum de ces N_i , on a $x_n \in U$. Ce qui montre que (x_n) converge vers x pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.

iii) C'est une conséquence du fait que la topologie faible est séparée.

iv) Considérons $\ell \in E^*$ telle que $\|\ell\| = 1$ et $\ell(x) = \|x\|_E$. Introduisons également l'application linéaire $T_n: E^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_n(f) = f(x_n)$. Alors T_n est une famille simplement bornée d'applications linéaires. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, cette famille est uniformément bornée. Il existe $c > 0$ telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| \leq c \|f\|.$$

Donc $|f(x_n)| \leq c \|f\|$ pour tout $f \in E^*$. En passant à la limite on obtient que $|f(x)| \leq c \|f\|$ pour tout $f \in E^*$. En particulier, en appliquant cette inégalité avec $f = \ell$ on en déduit le résultat cherché. \square

Proposition 4.16. Soit C un ensemble convexe et fermé dans un espace de Banach E . Si (x_n) converge faiblement vers x , alors $x \in C$.

Démonstration. La démonstration sera vue en Travaux Dirigés. \square

Proposition 4.17. *Considérons deux espaces de Banach E et F et une application linéaire $T: E \rightarrow F$. Alors T est continue pour les topologies fortes sur E et F si et seulement si T est continue pour les topologies faibles sur E et F .*

Démonstration. Supposons que T est continue pour les topologies fortes. Alors la continuité pour les topologies faibles est un exercice de topologie laissé au lecteur.

Réciproquement, supposons que T est continue pour les topologies faibles. Introduisons le graphe de T :

$$G(T) = \left\{ (x, y) \in E \times F \mid y = Tx \right\}.$$

Commençons par montrer que cet ensemble est faiblement fermé. Pour le voir, notons que $G(T) = \Lambda^{-1}(\{0\})$ où $\Lambda: F \times E \rightarrow F$ est définie par $\Lambda(y, x) = y - Tx$. Nous avons vu que la topologie faible est séparée. Par conséquent, les singletons sont fermés pour la topologie faible. On en déduit que $G(T)$ est fermé pour la topologie faible comme image réciproque d'un fermé faible par une application continue.

Pour conclure la démonstration, on note ensuite que $G(T)$ est un ensemble convexe (ce qui est immédiat). Alors, d'après la proposition 4.16, il est fortement fermé. On en déduit que T est continue pour les topologies fortes en appliquant le théorème du graphe fermé. \square

B. Convergence faible étoile

Définition 4.18. *i) Soit (f_n) une suite de points de E^* . On dit que cette suite converge fortement vers $f \in E^*$ si $\|f_n - f\|_{E^*}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par souci de simplicité, on dit souvent simplement que la suite (f_n) converge vers f (sans préciser fortement) et on note $f_n \rightarrow f$.*

ii) Soit (f_n) une suite de points de E^ . On dit que cette suite converge faiblement-* vers x si, pour tout x dans E , la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans \mathbb{K} . On le note $f_n \rightharpoonup^* f$ faible *.*

Proposition 4.19. *Considérons un espace de Banach E . Soit (f_n) une suite de E^* et soit $f \in E^*$. On a alors les propriétés suivantes.*

- i) Si (f_n) converge fortement vers f dans E^* , alors (f_n) converge faiblement-* vers f .*
- ii) La suite (f_n) converge vers f pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ si et seulement si $f_n \rightharpoonup^* f$ faiblement-*.*
- iii) Si (f_n) converge faiblement-* vers f et vers f' , alors $f = f'$.*
- iv) Si (f_n) converge faiblement-* vers f , alors la suite (f_n) est bornée dans E^* et*

$$\|f\|_{E^*} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{E^*}.$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la proposition 4.15. Elle est laissée en exercice. \square

4.5 Théorème de Banach-Alaoglu (cas séparable)

Considérons un espace de Banach E . Un résultat fondamental, appelé théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, énonce que la boule unité de E^* est compacte pour la topologie faible- $*$ et que, de plus, si E est séparable, alors la topologie $\sigma(E^*, E)$ est métrisable de sorte que la boule unité est séquentiellement compacte. Dans cette section, nous démontrerons ce résultat de compacité uniquement dans le cas où E est un espace de Banach séparable. Dans ce cas le résultat est dû à Banach. La démonstration est plus simple et, concrètement, c'est le cas le plus important pour les applications. Nous renvoyons le lecteur intéressé par le cas général à des nombreux livres d'Analyse fonctionnelle mentionnés dans la bibliographie. Un corollaire direct de ce résultat de compacité faible- $*$ est que la boule unité d'un espace de Banach réflexif est faiblement compacte. Nous verrons comment appliquer ce résultat pour le problème de la minimisation d'une fonctionnelle convexe.

Théorème 4.20 (Compacité faible étoile de la boule unité). *Considérons un espace de Banach E séparable. Toute suite (f_n) bornée dans E^* admet une sous-suite qui converge faiblement- $*$.*

Démonstration. Considérons une partie dénombrable dense $D = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ dans E . Comme la suite $(f_n(e_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, par hypothèse sur la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut en extraire une sous-suite convergente $(f_{\theta_0(n)}(e_0))_{n \in \mathbb{N}}$. On construit ainsi, par récurrence, une suite de fonctions strictement croissantes $\theta_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $(f_{\theta_0 \circ \dots \circ \theta_j(n)}(e_j))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. En utilisant le principe d'extraction diagonale, on considère alors la suite extraite $g_n = f_{\theta_0 \circ \dots \circ \theta_n(n)}$. Par construction, la suite $(g_n(e))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $e \in D$. Notons $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ la limite.

Soit e et e' dans D . Par hypothèse, il existe $\Lambda > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \Lambda \|x\|_E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant ce résultat avec $x = e - e'$ et en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve que

$$|g(e) - g(e')| \leq \Lambda \|e - e'\|_E,$$

ce qui montre que g est Lipschitzienne. On peut alors utiliser le lemme suivant pour étendre g sur E .

Lemme 4.21. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, D une partie dense de X , et g une application uniformément continue de (D, d) dans (Y, δ) . Si Y est complet, alors il existe une unique application continue \tilde{g} de (X, d) dans (Y, δ) telle que $\tilde{g}|_D = g$,*

et que \tilde{g} est de plus uniformément continue. Si g est Λ -lipschitzienne, alors \tilde{g} est aussi Λ -lipschitzienne.

Démonstration. Ce lemme a été démontré en Travaux Dirigés à l'exception du dernier point. Remarquons que le fait que \tilde{g} est aussi Λ -lipschitzienne est une conséquence directe de la construction de l'extension. \square

Notons $\tilde{g}: E \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on obtient à partir de g et du lemme précédent. Rappelons que la convergence faible-* correspond à la convergence simple. On a vu que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{g} sur D . Pour conclure la démonstration, il nous reste à voir que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g sur E tout entier et que g est une application linéaire.

Montrons la convergence sur E . Soit $x \in E$. Donnons nous $\varepsilon > 0$ et $e_j \in D$ tel que $\|x - e_j\|_E \leq \Lambda\varepsilon/3$. Si n est assez grand on a $|g_n(e_j) - \tilde{g}(e_j)| \leq \varepsilon/3$ de sorte que

$$\begin{aligned} |g_n(x) - \tilde{g}(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(e_j)| + |g_n(e_j) - \tilde{g}(e_j)| + |\tilde{g}(e_j) - \tilde{g}(x)| \\ &\leq \Lambda \|x - e_j\|_E + \frac{\varepsilon}{3} + \Lambda \|e_j - x\|_E \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement-* vers \tilde{g} .

Il reste juste à montrer que \tilde{g} est linéaire. Pour cela considérons $\lambda \in \mathbb{R}$, x, y dans E et considérons trois suites d'éléments de D telles vérifiant $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, $z_n \rightarrow \lambda x + y$. Alors

$$\tilde{g}(z_j) - \lambda\tilde{g}(x_j) - \tilde{g}(y_j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ g_n(z_j) - \lambda g_n(x_j) - g_n(y_j) \right\}.$$

Or $|g_n(z_j) - \lambda g_n(x_j) - g_n(y_j)|$ est majoré par $\Lambda \|z_j - \lambda x_j - y_j\|_E$ qui converge vers 0 quand j tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\tilde{g}(\lambda x + y) - \lambda\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y) = 0,$$

ce qui est le résultat désiré. \square

Corollaire 4.22. *Supposons que E est un espace de Banach réflexif dont le dual est séparable. Alors toute suite (x_n) suite bornée dans E admet une sous-suite convergeant faiblement.*

4.6 Application à l'optimisation convexe

Considérons un espace de Banach E et une fonctionnelle convexe $F: E \rightarrow \mathbb{R}$. Etant donné un ensemble $A \subset E$ qui est convexe, on cherche à minimiser F sur A . On appelle A l'ensemble des états admissibles.

Définition 4.23. Une fonction $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$F^{-1}(]-\infty, \lambda]) = \{x \in E : F(x) \leq \lambda\}$$

est fermé.

Exemple 4.24. Une fonction continue est donc semi-continue inférieurement car l'image réciproque d'une partie fermée est fermée. Mais la réciproque n'est pas vraie : la fonction indicatrice d'un ensemble ouvert U est s.c.i. mais elle n'est pas continue. Elle est s.c.i. car dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E : J(x) \leq \lambda\}$ est soit égal à E soit égal au complémentaire de U qui est fermé.

La notion de semi-continuité inférieure intervient naturellement en optimisation à cause de la propriété suivante.

Proposition 4.25. Soit $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie forte. Alors J est aussi semi-continue inférieurement pour la topologie faible. De plus, si (x_n) converge faiblement vers x , alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) \geq F(x).$$

Démonstration. En effet, les ensembles $\{x \in E : J(x) \leq \lambda\}$ sont convexes, et donc ils sont fermés pour la topologie faible dès qu'ils sont fermés pour la topologie forte. \square

Par exemple, on applique souvent ce résultat avec $F(x) = \|x\|_E$. Cette fonction est convexe et fortement continue, on en déduit que F est faiblement semi-continue inférieurement. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x$, alors $\|x\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_E$.

Définition 4.26. On dit que F est coercive sur A si pour toute suite (x_n) de points de A ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_E = +\infty \implies F(x_n) \rightarrow +\infty.$$

Si A est borné, alors il n'y a aucune suite (x_n) de points de A pouvant tendre en norme vers $+\infty$, et la condition est automatiquement vérifiée.

Notons que toute fonction strictement convexe est coercive.

Théorème 4.27. Soit E un espace de Banach réflexif dont le dual est séparable. Considérons une application $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et semi-continue inférieurement. Considérons un sous-ensemble $C \subset E$ convexe, fermé et non vide et supposons que F est coercive sur C . Alors il existe $u_0 \in C$ tel que

$$F(u_0) = \min_{u \in C} F(u).$$

Deuxième partie

Analyse Harmonique

Chapitre 5

Séries de Fourier et transformée de Fourier

5.1 Séries de Fourier

En 1812, Joseph Fourier comprenait comment représenter une fonction périodique f comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales. Cette théorie joue aujourd'hui un rôle central dans de nombreux domaines des mathématiques. Nous allons dans cette section démontrer le résultat qui le plus simple qui est aussi le plus important dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Notons $L^1(\mathbb{T}^n)$ l'espace des fonctions mesurables f définies sur \mathbb{R}^n , qui sont 2π -périodiques par rapport à chaque variable, et intégrables sur le cube $[0, 2\pi]^n$ (on quotiente par la relation d'équivalence d'égalité presque partout). Considérons un polynôme trigonométrique sur \mathbb{T}^n , c'est-à-dire une fonction de la forme

$$(5.1.1) \quad P(x) = \sum_{|k| \leq N} a_k e^{ik \cdot x} \quad (a_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}^n).$$

Notons e_k la fonction (appelée exponentielle oscillante) définie par

$$e_k(x) = \exp(ik \cdot x),$$

et introduisons le produit scalaire (\cdot, \cdot) défini sur $L^2(\mathbb{T}^n)$ par

$$(f, g) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Le point clé est la relation d'orthogonalité

$$(e_k, e_{k'}) = \delta_k^{k'}.$$

On en déduit que les coefficients a_k dans (5.1.1) vérifient

$$a_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int P(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

Cela motive la définition suivante. Etant donnée une fonction quelconque $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, on définit le $k^{\text{ème}}$ -coefficient de Fourier de f par

$$\hat{f}(k) = (f, e_k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-ik \cdot x} dx,$$

et on appelle série de Fourier de f la série

$$S_N f(x) = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}.$$

La question est de savoir si cette série converge et dans quel espace. Il y a de très nombreux résultats qui portent sur cette question¹. Dans ce cours, nous allons nous intéresser uniquement à la convergence dans l'espace $L^2(\mathbb{T}^n)$ (la définition de cet espace est analogue à celle de $L^1(\mathbb{T}^n)$). Il y a trois choses simples à avoir présentes à l'esprit :

- $L^1(\mathbb{T}^n)$ est l'espace naturel pour définir les coefficients de Fourier car c'est l'hypothèse naturelle pour garantir la convergence de l'intégrale ;
- l'inégalité d'Hölder implique que $L^2(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$ et donc on peut considérer les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$;
- $L^2(\mathbb{T}^n)$ est le cadre naturel pour étudier la convergence des séries de Fourier grâce à sa structure d'espace de Hilbert.

Le résultat le plus simple, le plus naturel et peut-être le plus important à savoir sur les séries de Fourier est le théorème suivant.

Théorème 5.1. *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, on a*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$$

avec convergence dans $L^2(\mathbb{T}^n)$, ce qui signifie que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - S_N f\|_{L^2} = 0 \quad \text{où} \quad S_N f(x) = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}.$$

De plus

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)|^2.$$

Réciproquement, si $c = (c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, alors la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ik \cdot x}$ converge dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ vers une fonction f vérifiant $\hat{f}(k) = c_k$.

1. Nous ne ferons qu'effleurer la surface de cette question et renvoyons le lecteur au livre de référence de Zygmund.

Nous allons démontrer ce résultat dans la suite de ce paragraphe en supposant que la dimension n est égale à 1 (on fait cette hypothèse uniquement pour simplifier les notations).

Notons que

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{ik(x-y)} dy = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y) f(y) dy,$$

où D_N est le $n^{\text{ème}}$ noyau de Dirichlet, défini par

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}.$$

Cela nous amène à introduire la notion d'approximation de l'identité. C'est une suite de fonctions (K_N) qui est, en gros, une régularisation de la fonction δ de Dirac. Cela signifie que $K_N * f$ converge vers f dans un sens raisonnable, où l'on a utilisé la notation

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy.$$

Définition. Une suite $(K_N)_{N=1}^{\infty}$ de fonctions 2π -périodiques continues est une approximation de l'identité si

- i) $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x) dx = 1$ pour tout N ,
- ii) $\sup_N \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(x)| dx < \infty$,
- iii) pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| > \delta} |K_N(x)| dx = 0.$$

Lemme 5.2. Considérons une approximation de l'identité (K_N) . Si $f \in L^p([-\pi, \pi])$ avec $1 \leq p < \infty$, ou si $p = \infty$ et f est une fonction continue 2π -périodique, alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|K_N * f - f\|_{L^p([-\pi, \pi])} = 0.$$

Remarque. Soit $f \in L^{\infty}([-\pi, \pi])$ telle que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|K_N * f - f\|_{L^p([-\pi, \pi])} = 0$. Comme $K_N * f$ est une fonction continue, on en déduit que f est nécessairement continue (car la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue).

Démonstration. On commence par étudier le cas $p = \infty$ de la convergence uniforme. Comme \mathbb{T} est compact, f est uniformément continue. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_x \sup_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|K_N * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(y)(f(x-y) - f(x)) \, dy \right| \\
&\leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \sup_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(t)| \, dt \\
&\quad + \int_{|y| \geq \delta} |K_N(y)| 2 \|f\|_{L^\infty} \, dy \\
&\leq C\varepsilon,
\end{aligned}$$

si N est assez grand.

Maintenant considérons $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $g \in C^0(\mathbb{T})$ telle que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}
\|K_N * f - f\|_{L^p} &\leq \|K_N * (f - g)\|_{L^p} + \|f - g\|_{L^p} + \|K_N * g - g\|_{L^p} \\
&\leq \left(\sup_N \|K_N\|_{L^1} + 1 \right) \|f - g\|_{L^p} + \|K_N * g - g\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Young, et le résultat précédent $p = \infty$ qui entraîne également que $\|K_N * g - g\|_{L^\infty}$ est arbitrairement petit pour N assez grand. \square

On ne peut pas appliquer le résultat précédent avec $K_N = D_N$ où D_N est le noyau de Dirichlet car l'hypothèse $\sup_N \|D_N\|_{L^1} < \infty$ n'est pas vérifiée. Pour faire apparaître une suite de noyaux K_N plus favorable, l'idée est de regarder les moyennes au sens de Césaro. Introduisons

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N S_m f(x) = F_N * f(x),$$

avec

$$F_N = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N D_m = \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}.$$

La suite (F_N) est clairement une approximation de l'identité. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 5.3 (Théorème de Fejer). *Si $f \in L^p([-\pi, \pi])$ avec $1 \leq p < \infty$, ou si $p = \infty$ et f est une fonction continue 2π -périodique, alors*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f)f - f\|_{L^p([-\pi, \pi])} = 0.$$

Corollaire 5.4. *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ vérifie $(f, e^{ikx}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$.*

Démonstration. Si $(f, e^{ikx}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $S_N f = 0$ et donc $\sigma_N f = 0$ pour tout $N \geq 0$. Or $\sigma_N f$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$, donc $f = 0$. \square

En combinant le corollaire précédent avec le théorème sur les bases hilbertiennes on en déduit directement le Théorème 5.1 sur la décomposition en séries de Fourier.

Remarque. Le théorème 5.1 entraîne que $S_N f$ converge vers f dans L^2 . On peut montrer (mais c'est plus difficile) que pour tout $1 < p < \infty$ et tout $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_{L^p} = 0.$$

On peut également montrer qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{T})$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$ tels que $\|S_N f - f\|_{L^\infty} \not\rightarrow 0$ et $\|S_N g - g\|_{L^1} \not\rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.

5.2 Transformée de Fourier

5.2.1 Introduction

Maintenant, au lieu de considérer des fonctions périodiques, nous allons considérer des fonctions définies sur \mathbb{R}^n . Nous allons étudier une décomposition analogue à celle des séries de Fourier. Ici aussi le but est d'écrire une fonction comme une somme d'exponentielles oscillantes. Rappelons qu'une exponentielle oscillante est par définition une fonction de la forme $x \mapsto \exp(ix \cdot \xi)$ avec $\xi \in \mathbb{R}^n$. La différence avec les séries de Fourier est que cette somme sera une intégrale au lieu d'être une somme indexée par un ensemble dénombrable.

La décomposition en séries de Fourier d'une fonction périodique se comprend bien : c'est la décomposition d'un élément d'un espace de Hilbert sur une base hilbertienne. En revanche, la décomposition d'une fonction non périodique comme une somme (au sens des intégrales) d'exponentielles oscillantes est peut-être moins intuitive. Pour comprendre comment on obtient cette décomposition, nous allons partir de la décomposition en série de Fourier pour des fonctions qui sont $2T$ -périodiques par rapport à chaque variable, puis faire tendre T vers $+\infty$. L'idée heuristique est de voir une fonction définie sur \mathbb{R}^n comme une fonction périodique de période $+\infty$ par rapport à chaque variable.

Nous voulons donc considérer la décomposition en série de Fourier d'une fonction f qui est $2T$ -périodique par rapport à chaque variable. Posons $Q_T =]-T, T[^n$ et supposons que $f \in L^2(Q_T)$. Les constantes vont dépendre de T et, pour ne pas se tromper dans les calculs, le plus simple est d'introduire un produit scalaire sur $L^2(Q_T)$ et une suite de fonctions orthonormées pour ce produit scalaire. Par exemple, considérons le produit scalaire usuel : $(f, g) = \int_{Q_T} f(x) \overline{g(x)} dx$. On pose alors $e_k(x) = (2T)^{-n/2} \exp(i\pi k \cdot x/T)$ où $k \in \mathbb{Z}^n$. Ces fonctions sont $2T$ -périodiques par rapport à chaque variable et on a $(e_k, e_l) = \delta_k^l$. Les coefficients de Fourier de f sont donnés par

$$\hat{f}_k = (f, e_k) = \frac{1}{(2T)^{n/2}} \int_{Q_T} f(x) \exp\left(-\frac{i\pi k \cdot x}{T}\right) dx.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_k e_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(2T)^n} \left(\int_{Q_T} f(y) \exp\left(-\frac{i\pi k \cdot y}{T}\right) dy \right) \exp\left(\frac{i\pi k \cdot x}{T}\right).$$

Si on pose $h = 1/T$, alors on a une expression de la forme $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} hF(kh)$ qui converge, formellement, vers $\int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) d\xi$. On trouve que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy \right) d\xi.$$

Cette formule correspond à une description fréquentielle de la fonction f (dans la littérature physique, on appelle ξ le vecteur d'onde et on dit que $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$ est la fréquence).

Définition 5.5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée \hat{f} ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ par

$$(5.2.1) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

L'hypothèse que f est une fonction intégrable est l'hypothèse minimale pour que la formule (5.2.1) ait un sens pour l'intégrale de Lebesgue. C'est pourquoi on commence par définir la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$. Mais nous allons voir qu'il est naturel de travailler avec d'autres espaces de fonctions. Il y a plusieurs raisons à cela. La première est que nous voudrions donner un sens à la formule suivante

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Pour que cette formule ait un sens, il faut que la transformée de Fourier de f soit intégrable. C'est pourquoi nous travaillerons avec l'espace suivant :

$$(5.2.2) \quad \mathcal{A} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

L'espace \mathcal{A} est un sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$, appelé algèbre de Wiener, que nous étudierons brièvement. Dans une autre direction, nous allons chercher à étendre la transformée de Fourier à des espaces différents de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nous allons voir deux résultats dans cette direction. Comme pour les séries de Fourier, un résultat essentiel est que la transformée de Fourier préserve la norme L^2 (à une constante dépendant de π près). Cela permet de prolonger la définition de la transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nous verrons par ailleurs comment définir la transformée de Fourier sur un espace beaucoup plus gros, l'espace des distributions tempérées, qui contient $L^1(\mathbb{R}^n) \cup L^2(\mathbb{R}^n)$ ainsi que de nombreux espaces utiles dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

5.2.2 Transformée de Fourier sur la classe de Schwartz

Pour construire une transformée de Fourier sur un espace qui soit le plus gros possible, nous allons utiliser un argument de dualité². Il s'agit de chercher un espace, le plus petit possible, tel que la transformée de Fourier soit un isomorphisme de cet espace dans lui-même. Ce principe est très simple mais nous allons voir que sa mise en oeuvre est subtile. Déjà, concernant le choix d'un espace de fonctions le plus petit possible, la proposition suivante montre que l'on ne peut pas utiliser l'espace auquel on pense spontanément (celui des fonctions C^∞ à support compact).

Proposition 5.6. *Il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, non nulle, à support compact et dont la transformée de Fourier est également à support compact.*

Démonstration. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support compact, alors on peut définir $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixz} f(x) dx.$$

Notons que $F(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ pour tout ξ dans \mathbb{R} . A fortiori, F s'annule sur un intervalle. Ceci est impossible car F est une fonction entière et on conclut la démonstration en rappelant qu'une fonction entière ne peut s'annuler que sur un ensemble discret. \square

Au lieu de travailler avec des fonctions C^∞ à support compact, nous allons travailler avec des fonctions C^∞ qui sont décroissantes rapides à l'infini, au sens de la définition ci-dessous.

Définition 5.7. (i) *On dit qu'une fonction f est à décroissance rapide si le produit de f par un polynôme quelconque est une fonction bornée.*

(ii) *On dit qu'une $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Il est équivalent de dire que les quantités suivantes*

$$\mathcal{N}_p(f) = \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^\infty}$$

sont finies pour tout p .

Remarque. Notons que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'exemple fondamental d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui n'est pas un élément de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est la gaussienne $x \mapsto \exp(-|x|^2)$. Cette fonction joue un rôle spécial dans l'étude de la transformée de Fourier.

2. Le principe est le suivant : si T est une application linéaire continue de E dans E alors T^* est continue de E^* dans E^* . De plus si $E \subset L^1(\mathbb{R}^n)^*$, alors $L^1(\mathbb{R}^n) \subset E^*$. Donc pour étendre la définition de la transformée de Fourier à un espace plus gros que $L^1(\mathbb{R}^n)$, on va chercher à la définir comme l'adjoint d'un isomorphisme d'un espace E inclus dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Attention : ceci correspond très approximativement à ce que nous allons faire. En effet, on ne pourra pas se contenter de travailler dans le cadre des espaces de Banach. Nous devons travailler dans le cadre des espaces de Fréchet.

Remarquons que \mathcal{N}_p est une norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout entier p . Cependant, si on considère $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ comme un espace normé pour cette norme, alors on n'obtient pas un espace de Banach (une suite de Cauchy pour cette norme ne converge pas en général vers un élément C^∞). La bonne notion topologique est celle d'espace vectoriel topologique muni d'une famille de semi-normes. Dans ce cas, comme nous l'avons vu dans le chapitre sur la topologie, on obtient une topologie métrisable. On vérifie facilement que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est complet et on peut alors énoncer le résultat suivant.

Proposition 5.8. *La classe de Schwartz est un espace de Fréchet gradué pour la topologie induite par la famille de semi-normes $\{\mathcal{N}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$.*

La proposition suivante contient plusieurs propriétés simples très utiles.

Proposition 5.9. *Supposons que f appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors*

- (i) *Pour tous multi-indices α et β dans \mathbb{N}^n , on a $x^\alpha \partial_x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
- (ii) *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*
- (iii) *La transformée de Fourier \widehat{f} appartient à $C^1(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,*

$$\partial_{\xi_j} \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-ix_j)f).$$

- (iv) *Pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout ξ dans \mathbb{R}^n ,*

$$\xi_j \widehat{f}(\xi) = -i\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi).$$

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate de la définition. Pour montrer (ii), on commence par observer que

$$(5.2.3) \quad \|f\|_{L^1} = \int |f(x)| dx \leq \sup \left\{ (1 + |x|)^{n+1} |f(x)| \right\} \int \frac{dx}{(1 + |x|)^{n+1}} \leq C\mathcal{N}_{n+1}(f).$$

Ensuite on observe que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (direct) et on conclut que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ car $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Pour démontrer le point (iii), il suffit d'observer que les hypothèses du théorème de dérivation de Lebesgue sont vérifiées puis d'appliquer ce résultat. Enfin, le point (iv) s'obtient en écrivant que

$$\xi_j e^{-ix \cdot \xi} = i \partial_{x_j} e^{-ix \cdot \xi},$$

puis en intégrant par parties :

$$\xi_j \widehat{f}(\xi) = \int (i \partial_{x_j} e^{-ix \cdot \xi}) f(x) dx = -i \int e^{-ix \cdot \xi} \partial_{x_j} f(x) dx = -i\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi).$$

Cette manipulation est justifiée car f est à décroissance rapide (on peut alors faire une intégration par parties sur une boule $B(0, R)$ puis faire tendre R vers $+\infty$). \square

La proposition suivante montre pourquoi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est le bon espace pour étudier la transformée de Fourier.

Proposition 5.10. *La transformée de Fourier applique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, et il existe des constantes C_p telles que, pour tout f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,*

$$(5.2.4) \quad \mathcal{N}_p(\widehat{f}) \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(f).$$

Ce qui démontre que la transformée de Fourier est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors on peut utiliser la proposition précédente pour obtenir

$$\left| \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{f}(\xi) \right| = \left| \mathcal{F} \left\{ \partial_x^\alpha (x^\beta f(x)) \right\} \right|.$$

Supposons que $|\alpha| \leq p$ et $|\beta| \leq p$. En utilisant l'inégalité $\|\widehat{u}\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}$ et la formule de Leibniz, il vient

$$\left| \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{f}(\xi) \right| \leq \left\| \partial_x^\alpha (x^\beta f) \right\|_{L^1} \leq K \sum_{|\alpha'| \leq p, |\beta'| \leq p} \left\| x^{\beta'} \partial_x^{\alpha'} f \right\|_{L^1}.$$

On en déduit l'inégalité en appliquant (5.2.3). □

Nous avons dit que les fonctions gaussiennes jouent un rôle important dans l'étude de la transformée de Fourier. C'est en raison du résultat suivant, qui énonce que la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est une fonction gaussienne.

Proposition 5.11. *Pour tout $a > 0$ et toute dimension $n \geq 1$,*

$$\mathcal{F} \left(e^{-a|x|^2} \right) = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/4a}.$$

Démonstration. Commençons par le cas de la dimension 1 d'espace, avec $a = 1$. Posons $f(x) = e^{-|x|^2}$. La transformée de Fourier de f , notée $\mathcal{F}(f)(\xi)$, est une fonction régulière qui vérifie

$$(\mathcal{F}f)'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ix\xi} e^{-x^2} dx = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \partial_x e^{-x^2} dx = \frac{-i}{2} \int_{\mathbb{R}} (-i\xi) e^{-ix\xi} e^{-x^2} dx$$

donc

$$(\mathcal{F}f)'(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(\mathcal{F}f)(\xi).$$

En utilisant

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

on en déduit que

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = e^{-\xi^2/4}(\mathcal{F}f)(0) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}.$$

On en déduit le résultat par des manipulations simples : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors la transformée de Fourier de $f(x/\lambda)$ est $|\lambda|^n \widehat{f}(\lambda\xi)$. De plus la transformée de Fourier de $f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ est $\widehat{f}_1(\xi_1) \cdots \widehat{f}_n(\xi_n)$. □

On est alors en mesure de démontrer le résultat suivant qui est fondamental.

Théorème 5.12. *Si u appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors, pour tout x dans \mathbb{R}^n ,*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Remarque. On a vu que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a aussi vu que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ et donc la fonction $\xi \mapsto e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi)$ est bien intégrable. La formule précédente a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Etant donné $\varepsilon > 0$ introduisons

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2|\xi|^2} \, d\xi.$$

En utilisant le lemme précédent on calcule (en ne manipulant que des intégrales convergentes)

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi} u(y) e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2|\xi|^2} \, dy \, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int u(y) e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|x-y|^2} \varepsilon^{-n} \, dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (u(x + \varepsilon y) - u(x)) e^{-\frac{1}{2}|y|^2} \, dy + u(x). \end{aligned}$$

Puisque

$$|u(x + \varepsilon y) - u(x)| \leq \varepsilon |y| \|u'\|_{L^\infty}$$

en passant à la limite on obtient le résultat voulu. \square

Théorème 5.13. *Si f et g appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\int f(x) \overline{g(x)} \, dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} \, d\xi.$$

En particulier, pour tout élément f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2.$$

Démonstration. Nous allons commencer par montrer que, si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$(5.2.5) \quad \int \widehat{\varphi}(x) \psi(x) \, dx = \int \varphi(y) \widehat{\psi}(y) \, dy.$$

Comme φ et ψ sont à décroissance rapide, on peut appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \widehat{\varphi} \psi \, dx &= \int \left(\int e^{-iy \cdot x} \varphi(y) \, dy \right) \psi(x) \, dx \\ &= \int \left(\int e^{-iy \cdot x} \psi(x) \, dx \right) \varphi(y) \, dy = \int \varphi \widehat{\psi} \, dy. \end{aligned}$$

On applique ensuite cette identité avec $\varphi = f$ et $\bar{g} = \widehat{\psi}$. Alors

$$\int f\bar{g} = \int \varphi\widehat{\psi} = \int \widehat{\varphi}\psi = \int \widehat{f}\mathcal{F}^{-1}\bar{g}.$$

Puis on vérifie (à l'aide du théorème d'inversion de Fourier) que

$$(\mathcal{F}^{-1}\bar{g})(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\xi}\bar{g}(y) dy = (2\pi)^{-n} \int e^{-iy\xi}g(y) dy = (2\pi)^{-n}\overline{\widehat{g}(\xi)}.$$

La dernière identité portant sur la norme L^2 est alors un corollaire évident. \square

Corollaire 5.14. *La transformée de Fourier \mathcal{F} est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, et*

$$\mathcal{F}^{-1}f = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}(\bar{f})}.$$

5.2.3 Transformée de Fourier sur l'algèbre de Wiener

5.3 Distributions tempérées

5.3.1 Définition des distributions tempérées

Définition 5.15. *Par définition, l'espace des distributions tempérées, noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Notation 5.16. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On notera $\langle u, f \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$ (plutôt que $u(f)$) le nombre complexe que l'on obtient en faisant agir u sur f .

Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors on définit une distribution tempérée U par

$$(5.3.1) \quad \langle U, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x) dx.$$

On vérifie que U est bien continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans \mathbb{C} d'après l'estimation suivante

$$|\langle U, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}| \leq \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^\infty} \left(\int \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} \right) \sup_{\mathbb{R}^n} |(1+|x|)^{n+1} v(x)|,$$

qui implique que

$$|\langle U, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}| \leq C \|u\|_{L^\infty} \mathcal{N}_{n+1}(v).$$

En raisonnant de façon similaire, on montre que la formule (5.3.1) définit une distribution tempérée pour toute fonction $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $p \in [1, +\infty]$. Ce procédé nous permet de plonger les espaces de Lebesgue dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En fait, on peut plonger beaucoup d'espaces et nous verrons plus loin l'exemple fondamental des espaces de Sobolev.

Définition 5.17. Nous dirons qu'une distribution tempérée $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à un certain espace X s'il existe $u \in X$ telle que,

$$\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle U, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x) dx.$$

5.3.2 Extension de l'analyse aux distributions tempérées

Nous avons vu que l'on peut plonger tous les espaces de Lebesgue dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On peut aussi y plonger les espaces de Hölder et ceux de Sobolev (les deux seront définis plus loin). Il faut penser à l'espace des distributions tempérées comme au plus gros espace dans lequel on souhaite travailler³. Il est alors naturel de vouloir étendre la définition des opérateurs importants en analyse à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Nous allons voir que ceci peut se faire très simplement.

Définition. Considérons une application linéaire continue $A: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nous dirons que A admet un adjoint continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'il existe une application linéaire continue $A^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall (u, v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2, \quad (Au, v) = (u, A^*v) \quad \text{où } (f, g) = \int f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Exemple. *i)* La transformée de Fourier vérifie aussi cette hypothèse.

ii) Soit $1 \leq j \leq n$. Si $A = \partial_{x_j}$, alors A est bien continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $\mathcal{N}_p(Au) \leq \mathcal{N}_{p+1}(u)$ et on a, en intégrant par parties, $(Au, v) = (u, A^*v)$ avec $A^* = -\partial_{x_j}$.

iii) Notons $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions C^∞ bornées ainsi que toutes ses dérivées. Si $c \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors l'opérateur A_c défini par $A_c(f)(x) = c(x)f(x)$ vérifie cette propriété. Alors $(A_c)^* = A_{\bar{c}}$.

iv) Si A et B vérifient cette propriété alors $A \circ B$ aussi avec $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$. On déduit des deux points précédents que tout opérateurs de la forme A différentiel, de la forme $A(f)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x)\partial_x^\alpha f(x)$ avec $c_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie cette propriété.

v) On verra un autre exemple plus tard qui généralise la notion d'opérateur différentiel (voir la partie consacrée aux opérateurs pseudo-différentiels).

Nous allons montrer qu'il existe une application linéaire continue $\tilde{A}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ qui prolonge la définition de A . Pour cela on définit

$$\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \tilde{A}u, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle u, \overline{A^*v} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}.$$

Montrons que l'opérateur ainsi construit prolonge la définition de A .

3. Il y a des espaces plus gros, comme l'espace des distributions ou l'espace des hyperfonctions mais, volontairement, nous n'étudierons pas ces espaces dans ce livre.

Proposition 5.18. *Considérons l'application*

$$\mathcal{T}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \mathcal{T}_u = \left(v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto (u, \bar{v}) = \int u(x)v(x) dx \right).$$

Alors i) cette application est bien définie, linéaire, continue et injective et ii) on a

$$\tilde{A}\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_{Au}, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

La première partie du résultat signifie que \mathcal{T} est une injection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; la seconde partie signifie que \tilde{A} coïncide avec A sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nous avons déjà vu que

$$|\langle \mathcal{T}_u, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}| \leq \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^1} \leq C\mathcal{N}_0(u)\mathcal{N}_{n+1}(v),$$

ce qui montre que \mathcal{T}_u appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et que $u \mapsto \mathcal{T}_u$ est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De plus \mathcal{T} est injective car $\mathcal{T}_{u_1} = \mathcal{T}_{u_2}$ implique $\mathcal{T}_{u_1 - u_2}(\overline{u_1 - u_2}) = 0$ donc $\|u_1 - u_2\|_{L^2} = 0$ d'où $u_1 = u_2$.

Avec les définitions précédentes, pour tout u, v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \tilde{A}\mathcal{T}_u, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle \mathcal{T}_u, \overline{A^*v} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = (u, A^*v) = (Au, v) = \langle \mathcal{T}_{Au}, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}.$$

Ce qui démontre que $\tilde{A}\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_{Au}$. □

Dans la suite on notera simplement A au lieu de \tilde{A} l'opérateur étendu à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En utilisant cette construction, on peut ainsi définir la dérivée partielle ∂_{x_j} de toute distribution tempérée! Par définition, on a

$$\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \partial_{x_j} u, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = -\langle u, \partial_{x_j} v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}.$$

On en déduit que l'on peut définir $\partial_x^\alpha u$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On peut donc dériver à tout ordre n'importe quel distribution (ce qui est bien sûr faux pour les fonctions).

Nous allons maintenant appliquer la construction précédente avec la transformée de Fourier. Rappelons que (cf (5.2.5)), pour tout φ, ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int \widehat{\varphi}(x)\psi(x) dx = \int \varphi(y)\widehat{\psi}(y) dy.$$

Considérons une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On peut alors appliquer le principe précédant pour définir sa transformée de Fourier, notée $\mathcal{F}(u)$, par

$$\langle \mathcal{F}(u), v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle u, \widehat{v} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}.$$

On note également \widehat{u} la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Proposition 5.19. *La transformée de Fourier \mathcal{F} est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (application linéaire continue d'inverse continue). De plus on a*

$$\mathcal{F}^{-1}f = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}(\overline{f})}.$$

Nous avons déjà remarqué que l'on peut plonger les espaces de Lebesgue dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On peut en particulier considérer la transformée de Fourier d'une fonction $L^p(\mathbb{R}^n)$. Le cas le plus important en pratique est celui de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dans ce cas on a le résultat suivant.

Proposition 5.20. *Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}(u)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2.$$

Remarque. Avec les conventions précédentes, le fait que $\mathcal{F}(f)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}^n)$ signifie qu'il existe une fonction $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\langle \mathcal{F}(f), v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)v(x) dx$ pour tout $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors on a $\|h\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2$.

Définition 5.21. *On dit qu'une fonction m appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à croissance lente s'il existe un polynôme P telle que $|m(\xi)| \leq P(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

Si m est une fonction à croissance lente et si $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors mv appartient aussi à la classe de Schwartz. On vérifie donc directement que l'on peut définir un opérateur, noté $m(D_x)$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{F}(m(D_x)u) = m\mathcal{F}u.$$

Ces opérateurs interviennent très souvent. Nous les reverrons dans le chapitre consacré au calcul symbolique pour les opérateurs pseudo-différentiels.

5.4 Décomposition de Littlewood-Paley

5.4.1 Décomposition dyadique de l'unité

Nous allons introduire une décomposition dyadique de l'unité. Cette décomposition permet d'introduire un paramètre (grand ou petit) dans un problème qui n'en comporte pas. C'est une idée simple et extrêmement féconde.

Lemme 5.22 (Décomposition dyadique de l'unité). *Soit $n \geq 1$. Il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ telle que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,*

$$1 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \chi(2^p \xi).$$

Remarque. (i) Le fait que $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est équivalent à dire que χ est C^∞ à support compact et s'annule sur un voisinage de l'origine.

(ii) Notons que la convergence ne pose pas de problème car, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a $\kappa(2^p \xi) = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers p . On a même un résultat plus fort : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\xi \in K$, $\kappa(2^p \xi)$ est non nul pour au plus N valeurs de $p \in \mathbb{Z}$. On dit que la somme est localement finie.

Démonstration. Soit $\kappa \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ vérifiant $\kappa \geq 1$ sur la couronne $\{1/4 \leq |\xi| \leq 1/2\}$. Introduisons, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(\xi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \kappa(2^p \xi).$$

Puisque κ est à support compact, et nulle sur un voisinage de l'origine, la somme est localement finie. Il est donc immédiat que Ψ est bien définie et appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus on a $\Psi(2^p \xi) = \Psi(\xi)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $\Psi(\xi) \neq 0$ pour $\xi \neq 0$. Pour cela notons p_0 le plus petit entier tel que $|2^{p_0} \xi| \geq 1/4$. Alors nécessairement $|2^{p_0} \xi| \leq 1/2$ car sinon $p_0 - 1$ conviendrait. On en déduit que $\kappa(2^{p_0} \xi) = 1$ puis que $\Psi(\xi) \geq \kappa(2^{p_0} \xi) > 0$. On a montré que Ψ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on peut alors poser $\chi = \kappa/\Psi$. Comme κ s'annule au voisinage de zéro on a bien que $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. \square

Il sera souvent commode d'écrire une partition de l'unité sous la forme suivante.

Lemme 5.23. Soit $n \geq 1$. Il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$(5.4.1) \quad 1 = \psi(\xi) + \sum_{p=1}^{\infty} \varphi(2^{-p} \xi)$$

et

$$\text{supp } \psi \subset \{|\xi| \leq 1\}, \quad \text{supp } \varphi \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 1\}.$$

Démonstration. Nous allons donner deux démonstrations.

(i) Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ une fonction radiale vérifiant $\psi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1/2$, et $\psi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 1$. On pose $\varphi(\xi) = \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$. La fonction φ est supportée dans la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 2$, et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a l'égalité (5.4.1).

(ii) Quite à modifier la fonction κ dans la démonstration du lemme précédent, on peut toujours supposer que $\text{supp } \chi \subset \text{supp } \kappa \subset \{1/2 \leq |\eta| \leq 1\}$. Posons alors $\varphi = \chi$ et $\psi(\xi) = \sum_{p=0}^{+\infty} \chi(2^p \xi)$ prolongée en 0 par $\psi(0) = 1$. Alors ψ vaut 1 sur un voisinage de l'origine et ψ est une somme localement finie hors d'un voisinage de l'origine ce qui implique que ψ est C^∞ . Enfin, on a

$$1 = \psi(\xi) + \sum_{p=-\infty}^{-1} \varphi(2^p \xi),$$

et on obtient le résultat voulu en changeant p en $-p$. \square

5.4.2 Décomposition dyadique de l'identité

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ une fonction radiale vérifiant $\psi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1/2$, et $\psi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 1$. On pose $\varphi(\xi) = \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$. La fonction φ est supportée dans la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 2$, et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a l'égalité

$$1 = \psi(\xi) + \sum_{p=1}^{\infty} \varphi(2^{-p}\xi).$$

Définissons, pour $p \geq -1$, les multiplicateurs de Fourier Δ_p :

$$\Delta_{-1} := \psi(D_x) \quad \text{et} \quad \Delta_p := \varphi(2^{-p}D_x) \quad (p \geq 0).$$

Etant donné $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $p \in \mathbb{N}$, on notera toujours

$$u_p = \Delta_p u.$$

Alors $\widehat{u_{-1}} = \psi(\xi)\widehat{u}$ et $\widehat{u_p} = \varphi(2^{-p}\xi)\widehat{u}$.

Introduisons aussi, pour $p \geq 0$, les multiplicateurs de Fourier S_p :

$$S_p := \psi(2^{-p}D_x) = \sum_{k=-1}^{p-1} \Delta_k,$$

la dernière égalité provient de la définition même de φ .

La partition de la fonction unité implique aussi une partition de l'identité.

Proposition 5.24. *On a*

$$I = \sum_{p \geq -1} \Delta_p,$$

au sens des distributions : que pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la série $\sum u_p$ converge vers u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie que $\sum_p \langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$ converge vers $\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Les sommes partielles $S_N u = \sum_{p \geq 0}^{N-1} u_p$ sont bien définies et

$$\langle \mathcal{F}(S_N u), \theta \rangle = \langle \psi(2^{-N}\xi)\mathcal{F}(u), \theta \rangle = \langle \mathcal{F}(u), \psi(2^{-N}\xi)\theta \rangle,$$

or $\lim_{N \rightarrow +\infty} \psi(2^{-N}\xi)\theta = \theta$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donc

$$\mathcal{F}(S_N u) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(u) \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Par continuité de $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a bien $u = \sum_{p \geq -1} u_p$. \square

5.4.3 Caractérisation des espaces de Hölder

Dans ce paragraphe nous allons montrer que l'on peut décrire les espaces de Hölder à l'aide de la transformée de Fourier.

Rappelons la définition des espaces de Hölder.

Définition 5.25. *i) Soit $r \in]0, 1[$. On note $C^{0,r}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions bornées sur \mathbb{R}^n vérifiant*

$$\exists C > 0 / \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^r .$$

ii) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$. On note $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $C^k(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k appartiennent à $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

iii) Soit $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ de sorte que $r = k + \alpha$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$ alors on note simplement $C^r(\mathbb{R}^n)$ l'espace $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Pour $r \in]0, 1[$, l'espace $C^r(\mathbb{R}^n)$ est muni d'une structure d'espace de Banach par la norme

$$\|u\|_{C^r} = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^r} .$$

Nous donnons ci-après une norme équivalente.

Proposition 5.26. *(i) Soit $r \in]0, 1[$. Il existe une constante $A_r > 0$ telle que les deux propriétés suivantes aient lieu :*

i) Si $u \in C^r(\mathbb{R}^n)$ alors, pour tout $p \geq -1$,

$$\|u_p\|_{L^\infty} \leq A_r \|u\|_{C^r} 2^{-pr} .$$

ii) Réciproquement, si, pour tout $p \geq -1$,

$$\|u_p\|_{L^\infty} \leq C 2^{-pr} ,$$

alors $u \in C^r(\mathbb{R}^n)$ et $\|u\|_{C^r} \leq A_r C$.

Démonstration. *i) Considérons $p \geq 0$. Pour démontrer le premier point, on commence par écrire u_p sous forme intégrale,*

$$(5.4.2) \quad u_p(x) = 2^{pn} \int \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(2^p(x - y))u(y) dy \quad \text{pour } p \geq 0 .$$

Le reste de la preuve, ainsi qu'un calcul précis des constantes, utilise juste le fait que les moments de $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ sont tous nuls. Ainsi avec le moment d'ordre 0 on obtient

$$u_p(x) = 2^{pn} \int \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(2^p(x - y)) (u(y) - u(x)) dy \quad \text{pour } p \geq 0 ,$$

d'où

$$\begin{aligned} |u_p(x)| &\leq 2^{pn} \|u\|_{C^r} \int |\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(2^p(x-y))| |y-x|^r dy \\ &= 2^{-pr} \|u\|_{C^r} \int |\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(z)z| dz. \end{aligned}$$

Le cas $p = -1$ se traite de manière similaire. On écrit

$$u_{-1}(x) = \int \mathcal{F}^{-1}(\psi)(x-y)u(y) dy,$$

puis on utilise que $\mathcal{F}^{-1}(\psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et donc $\mathcal{F}^{-1}(\psi)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que la norme L^∞ de u est contrôlée par la norme L^∞ de u .

ii) Montrons la réciproque. On vérifie que $u \in L^\infty$ car $\sum u_p$ converge normalement si $\|u_p\|_{L^\infty} \leq C2^{-pr}$. Il reste à estimer

$$\sup_{x \neq y, |x-y| \leq 1} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^r}.$$

(Noter que l'on peut se restreindre évidemment à $|x-y| \leq 1$.)

Pour cela on pose, pour un entier p à déterminer,

$$u = S_p u + R_p u, \quad S_p u = \sum_{q=-1}^{p-1} u_q \text{ et } R_p u = \sum_{q=p}^{+\infty} u_q.$$

Par hypothèse il vient

$$\|R_p u\|_{L^\infty} \leq \sum_{q \geq p} \|u_q\|_{L^\infty} \leq \sum_{q \geq p} C2^{-qr} = \frac{C}{1-2^{-r}} 2^{-pr}.$$

d'où l'on déduit évidemment que $|R_p u(y) - R_p u(x)| \leq \frac{2C}{1-2^{-r}} 2^{-pr}$. D'autre part

$$|S_p u(x) - S_p u(y)| \leq |x-y| \sum_{q=-1}^{p-1} \|\nabla u_q\|_{L^\infty}.$$

D'après la formule rappelée au début de la preuve nous obtenons

$$\|\nabla u_q\|_{L^\infty} \leq C'2^q \|u_q\|_{L^\infty} \leq C''C2^{q-qr}.$$

Avec pour $q = -1$, $\|\nabla u_{-1}\|_{L^\infty} \leq C'''C$. Comme $r < 1$, on a $1-r > 0$ et donc

$$\sum_{q=0}^{p-1} 2^{q-qr} \leq \frac{1}{2^{1-r} - 1} 2^{p(1-r)}.$$

Regroupons les deux estimations : il existe deux constantes K_1 et K_2 qui ne dépendent que de r telles que

$$|u(y) - u(x)| \leq K_1 C |x - y| 2^{p-pr} + K_2 2^{-pr}.$$

Choisissons p tel que $2^{-1} \leq 2^p |x - y| \leq 1$ (ce qui est possible car on suppose $|x - y| \leq 1$). Alors

$$|u(y) - u(x)| \leq K_3 C |x - y|^r,$$

ce qui achève la preuve. □

5.4.4 Espaces de Zygmund

On a montré que si $r \in]0, 1[$,

$$u \in C^r(\mathbb{R}^n) \iff \sup_p 2^{pr} \|u_p\|_{L^\infty} < +\infty.$$

En fait, on a plus généralement

$$r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, \quad u \in C^r(\mathbb{R}^n) \iff \sup_p 2^{pr} \|u_p\|_{L^\infty} < +\infty.$$

Définition. Soit r un réel, on désigne par $C_*^r(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace des distributions tempérées défini par

$$u \in C_*^r(\mathbb{R}^n) \iff \sup_{p \geq -1} 2^{pr} \|u_p\|_{L^\infty} < +\infty.$$

Remarque. On définit ces espaces pour tout $r \in \mathbb{R}$ et pas seulement $r \geq 0$. Cela est commode car les espaces formés de dérivées de fonctions de C_*^r interviennent naturellement.

Ainsi le résultat précédent donne directement

$$r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \Rightarrow C_*^r(\mathbb{R}^n) = C^r(\mathbb{R}^n).$$

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, on montre facilement que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad C^k(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset C_*^k(\mathbb{R}^n).$$

Cependant, on peut montrer que

$$r \in \mathbb{N} \Rightarrow C_*^r(\mathbb{R}^n) \neq C^r(\mathbb{R}^n).$$

Donnons par exemple une caractérisation élémentaire de $C_*^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 5.27. *L'espace $C_*^1(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions bornées u telles que*

$$\exists C > 0 / \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C |y|.$$

Démonstration. Supposons que la fonction u appartienne à $C_*^1(\mathbb{R}^n)$. Considérons alors un point $y \in B(0,1)$ non nul. En utilisant la décomposition dyadique de l'espace des fréquences et l'inégalité de Taylor à l'ordre 2 entre y et 0, il vient

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C \|u\|_{C_*^1} \left(|y|^2 \sum_{q \leq N} 2^q + 4 \sum_{q > N} 2^{-q} \right),$$

où N est un entier quelconque. En choisissant N tel que $2^{qN} = |y|^{-1}$, on obtient

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C \|u\|_{C_*^1} |y|.$$

Réciproquement, choisissons une fonction u telle que, pour tout y dans \mathbb{R}^n , on ait

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C |y|.$$

Il s'agit de majorer $\|\Delta_q u\|_{L^\infty}$. Le fait que la fonction φ soit radiale, donc paire, entraîne que

$$u_q(x) = 2^{qn} \mathcal{F}^{-1} \varphi(2^q \cdot) * u(x) = 2^{qn} \int \mathcal{F}^{-1} \varphi(2^q y) u(x-y) dy = 2^{qn} \int \mathcal{F}^{-1} \varphi(2^q y) u(x+y) dy.$$

Introduisons $h(z) = \mathcal{F}^{-1} \varphi(z)$. Comme φ est nulle près de l'origine on en déduit que h est d'intégrale nulle, donc

$$2^{qn} \mathcal{F}^{-1} \varphi(2^q \cdot) * u(x) = 2^{qn-1} \int \mathcal{F}^{-1} \varphi(2^q y) (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) dy.$$

Comme la fonction $z \mapsto |z| h(z)$ est intégrable, on a

$$\|u_q\|_{L^\infty} \leq C 2^{-q} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|},$$

ce qui conclut la démonstration. □

Chapitre 6

Espaces de Sobolev

6.1 Dérivation au sens faible et espaces de Sobolev

Définition 6.1 (Dérivée faible et espace de Sobolev). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit qu'une fonction $u \in L^2(\Omega)$ admet une **dérivée au sens faible** dans $L^2(\Omega)$ par rapport à la variable x_j si il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} v \phi \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On note $v = \partial u / \partial x_j$ ou simplement $\partial_j u$.

L'espace de **Sobolev** $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions u appartenant à $L^2(\Omega)$ et qui admettent des dérivées au sens faible $\partial_j u$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Remarque. Supposons que Ω est un ouvert borné. On vérifie alors qu'une fonction $u \in C^1(\overline{\Omega})$ est aussi dérivable au sens faible (et la dérivée au sens faible est alors la dérivée usuelle). Mais il existe des fonctions qui sont dérivables au sens faible sans être dérivable au sens classique, par exemple la fonction $|x|$ sur $\Omega =]-1, 1[$.

Proposition 6.2. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle u, v \rangle := \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega} (\partial_i u) \overline{(\partial_i v)} \, dx + \int_{\Omega} u \overline{v} \, dx.$$

On a donc $\langle u, v \rangle = (\nabla u, \nabla v) + (u, v)$ où, par abus de notations, on note de la même façon (\cdot, \cdot) le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et sur $L^2(\mathbb{R}^n)^n$.

Démonstration. La démonstration sera donné en Travaux Dirigés. □

La notion de dérivée au sens faible permet de généraliser la notion de dérivée. De la même manière on peut généraliser la notion de solution en introduisant une notion de solution faible grâce à la théorie des distributions. Un des objectifs de ce chapitre est justement de permettre une introduction à cette théorie. Pour cela, nous allons définir la notion de solution faible de l'équation

$$-\Delta u = f.$$

Définition 6.3 (Solution faible). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Une solution faible de l'équation $-\Delta u = f$ est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant*

$$(6.1.1) \quad \forall \phi \in C_0^1(\Omega), \quad \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega} (\partial_i u)(\partial_i \phi) dx = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

Remarque 6.4. *i) Soit Ω un ouvert borné régulier. Nous définirons plus loin ce qu'est un ouvert régulier, ici nous supposons que Ω est tel que l'on peut appliquer le théorème de la divergence :*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X dx = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu d\sigma,$$

pour tout champ de vecteurs $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, où ν désigne la normale unitaire sortante. Considérons $f \in C^0(\overline{\Omega})$ et supposons que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifie $-\Delta u = f$ au sens classique. Alors u est aussi une solution faible comme on va le vérifier à l'aide de la formule de la divergence. Pour cela on utilise que ϕ s'annule sur le bord de Ω pour écrire

$$0 = \int_{\partial\Omega} \phi \partial_n u d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\phi \nabla u) dx = \int_{\Omega} (\nabla \phi \cdot \nabla u + \phi \Delta u) dx.$$

De sorte que (6.1.1) provient de $-\Delta u = f$.

ii) Il existe des solutions faibles qui ne sont pas C^2 et pour lesquelles l'équation $-\Delta u = f$ n'a pas de sens ponctuel. Par exemple, la fonction $u(x) = \operatorname{sign}(x)x^2$ est une solution faible de $\partial_x^2 u = 2 \operatorname{sign}(x)$ mais l'équation précédente n'a pas de sens ponctuellement en $x = 0$.

iii) On obtient bien sûr une définition équivalente en remplaçant ϕ par $\bar{\phi}$ dans (6.1.1).

iv) L'hypothèse que f est localement intégrable est l'hypothèse minimale pour donner un sens à $\int_{\Omega} f \phi dx$.

Définition 6.5 (Espaces de Sobolev d'ordres supérieurs). *On dit qu'une fonction a appartient à l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ si a appartient à $H^1(\Omega)$ et si les dérivées au sens faible L^2 de a appartiennent à $H^1(\Omega)$.*

Plus généralement, on peut définir par récurrence des espaces $H^k(\Omega)$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^$: on dit que a appartient à $H^k(\Omega)$ si $a \in H^{k-1}(\Omega)$ et si les dérivées (au sens faible) de a appartiennent à $H^{k-1}(\Omega)$. L'espace $H^\infty(\Omega)$ est l'intersection de tous ces espaces.*

Remarque 6.6. Cette définition est similaire à celle de l'espace des fonctions C^k : une fonction C^k est une fonction C^1 dont les dérivées sont aussi des fonctions C^{k-1} .

6.2 Inégalités de Poincaré

Une inégalité de Poincaré est une inégalité qui permet de contrôler la norme L^2 d'une fonction par la norme L^2 de son gradient. Ces inégalités jouent un rôle fondamental en analyse. Il en existe de nombreuses versions et nous allons en discuter certaines dans cette section. On donnera deux applications simples : (i) problème en temps grand pour une équation parabolique et (ii) résultat d'existence pour un problème elliptique.

6.2.1 Introduction

Nous commençons par démontrer la version la plus simple de l'inégalité de Poincaré.

Lemme 6.7 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). *Supposons que $u \in C^1(\mathbb{R})$ est T -périodique. Si $\int_0^T u(t) dt = 0$ alors*

$$\left(\int_0^T |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{T}{2\pi} \left(\int_0^T |u'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. La démonstration s'obtient facilement à partir de la décomposition en séries de Fourier des fonctions appartenant à $L^2(]0, T[)$. Considérons le produit scalaire usuel : $(f, g) = \int_0^T f(t)\overline{g(t)} dt$. On pose alors $e_k(t) = T^{-1/2} \exp(2ik\pi t/T)$. Ces fonctions sont T -périodiques et on a $(e_k, e_l) = \delta_k^l$. Introduisons les coefficients de Fourier

$$\hat{u}_k = (u, e_k) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T u(t) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{T}\right) dt.$$

En intégrant par parties, on vérifie que les coefficients de Fourier de u' vérifient

$$(\hat{u}')_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T u'(t) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2i\pi}{T} k \hat{u}_k.$$

On en déduit grâce à la formule de Plancherel appliquée à u et à u' que

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\hat{u}_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^2 |\hat{u}_k|^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \int_0^T |u'(t)|^2 dt,$$

où l'on a utilisé que $\hat{u}_0 = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T u(t) dt = 0$. □

En guise d'illustration, démontrons le résultat suivant sur le comportement en temps long des solutions d'une équation de la chaleur à coefficients variables.

Proposition 6.8. *Soit $u = u(t, x)$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 2π -périodique en x , et solution de l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0,$$

où γ est une fonction C^∞ , 2π -périodique et minorée par une constante positive. Si la moyenne $\int_{-\pi}^{\pi} u(0, x) dx$ s'annule, alors il existe une constante C telle que, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t, x)^2 dx \leq e^{-tC} \int_{-\pi}^{\pi} u(0, x)^2 dx.$$

Démonstration. Si $\gamma = 1$ on obtient ce résultat facilement à partir de la décomposition de la solution en séries de Fourier et de l'identité de Plancherel. Pour $\gamma \neq 1$ on procède de la façon suivante. Notons d'abord que, par périodicité en x ,

$$\frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) dx = 0.$$

On en déduit que $\int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx = 0$ pour tout temps $t \geq 0$ puisque cette propriété est vraie initialement par hypothèse. Ceci va nous permettre d'utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Ensuite on multiplie l'équation par u et on intègre sur $[-\pi, \pi]$ pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x)^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(x)(\partial_x u(t, x))^2 dx = 0.$$

Comme γ est minorée par une constante strictement positive, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger assure que

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t, x)^2 dx \leq \frac{C}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(x)(\partial_x u(t, x))^2 dx,$$

pour une certaine constante C . L'inégalité voulue provient du lemme de Gronwall. \square

6.2.2 Inégalité de Poincaré

Remarquons que l'inégalité de Poincaré-Wirtinger est clairement fautive pour les fonctions constantes (pour une fonction u constante on ne peut pas contrôler la norme L^2 de u par la norme L^2 de sa dérivée u'). L'hypothèse que u est de moyenne nulle permet de "filtrer" les fonctions constantes. Une autre façon de filtrer ces fonctions constantes consiste à supposer que u s'annule, en un certain sens, sur une partie de l'ouvert. Nous allons maintenant démontrer une inégalité de Poincaré, fondamentale pour les applications, où l'on suppose que u s'annule sur le bord. C'est une autre façon de filtrer les fonctions constantes. Nous allons considérer le cas général où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n avec n entier non nul quelconque.

Il faut d'abord préciser dans quel sens la fonction s'annule sur le bord. Pour cela, nous allons considérer des fonctions qui sont limites de fonctions nulles sur un voisinage du bord.

Définition 6.9. On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 6.10 (Inégalité de Poincaré). *Supposons que Ω est inclus dans le rectangle $\mathcal{R} = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x_n| \leq R\}$. Alors, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$(6.2.1) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2R \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Comme $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ par définition et comme les deux termes de l'inégalité (6.2.1) sont continus pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$, il suffit de démontrer (6.2.1) pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Si $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on peut étendre u par 0 en une fonction définie sur la bande \mathcal{R} , que l'on note encore u . Comme u s'annule au bord de cette bande, on peut écrire

$$u(x', x_n) = \int_{-R}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$|u(x', x_n)|^2 \leq \left(\int_{-R}^{x_n} 1 dt \right) \int_{-R}^{x_n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt.$$

On en déduit trivialement que

$$|u(x', x_n)|^2 \leq \left(\int_{-R}^R 1 dt \right) \int_{-R}^R \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt.$$

Puis, en intégrant par rapport à la variable x' sur \mathbb{R}^{n-1} , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^2 dx' \leq 2R \iint_{\mathcal{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dx' dt \leq 2R \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{R})}^2.$$

En intégrant ensuite par rapport à la variable x_n , il vient

$$\iint_{\mathcal{R}} |u(x', x_n)|^2 dx' dx_n \leq (2R)^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{R})}^2,$$

d'où l'inégalité voulue. □

6.2.3 Application au problème de Dirichlet homogène

Considérons une fonction $V \in L^\infty(\Omega)$, positive ou nulle, une fonction F définie sur Ω et une fonction f définie sur le bord $\partial\Omega$. Le problème dit de Dirichlet est le problème suivant : peut-on trouver une unique fonction u vérifiant

$$-\Delta u + Vu = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

Nous allons dans ce paragraphe considérer le cas où $g = 0$ (et nous disons qu'il s'agit du problème homogène). Le cas non homogène sera traité ultérieurement.

Pour u et v appartenant à $H^1(\Omega)$, on introduit

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + Vuv) \, dx.$$

C'est une application bilinéaire. La forme quadratique associée à B est appelée l'énergie de u , elle est donnée par

$$E(u) = B(u, u) = \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + Vu^2) \, dx.$$

(C'est une quantité positive ou nulle car $V \geq 0$ par hypothèse.)

Lemme 6.11. *La forme B est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ et l'application $u \mapsto E(u)^{1/2}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.*

Ce lemme est une conséquence directe de l'inégalité de Poincaré qui implique que pour $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\frac{1}{1 + \|V\|_{L^\infty}} E(u) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + C(\Omega)^2) \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (1 + C(\Omega)^2) E(u).$$

Définition 6.12. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème de Dirichlet homogène*

$$-\Delta u + Vu = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

i) u est une solution faible de $-\Delta u + Vu = f$ au sens déjà vu au chapitre précédent :

$$\forall \phi \in C_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi + Vu\phi) \, dx = \int_{\Omega} f\phi \, dx.$$

ii) $u \in H_0^1(\Omega)$ (c'est le sens que nous donnons au fait que u s'annule sur le bord ; nous reviendrons sur ce point plus tard).

Proposition 6.13. *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème de Dirichlet*

$$-\Delta u + Vu = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

a une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. L'application $\phi \mapsto (f, \phi)_{L^2}$ est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$ et donc *a fortiori* une forme linéaire continue sur $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ puisque la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ domine la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ par définition. Posons $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{B(u, u)}$. Nous avons vu que c'est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. On en déduit deux choses. D'abord l'application $\phi \mapsto (f, \phi)_{L^2}$ est une forme linéaire continue sur $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$. Et deuxièmement, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $B(\cdot, \cdot)$. On peut alors appliquer le théorème de représentation de Riesz pour déduire l'existence et l'unicité d'un élément u de $H_0^1(\Omega)$ tel que $B(u, v) = (f, v)_{L^2}$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, ceci démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible. \square

6.3 Analyse de Fourier et espaces de Sobolev

Étant donné un ouvert Ω quelconque de \mathbb{R}^n , nous avons déjà introduit les espaces de Sobolev $H^k(\Omega)$ où k est un entier naturel. Nous avons également rappeler dans un autre chapitre que l'on peut étendre la définition de la transformée de Fourier à l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dans le cas particulier $\Omega = \mathbb{R}^n$, en utilisant cette transformée de Fourier, nous allons définir et étudier dans cette section les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ où l'indice s est un nombre réel positif quelconque.

6.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 6.14. Soit $s \in [0, +\infty[$. On dit qu'une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ si

$$\int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Notation 6.15. Nous utiliserons souvent la notation abrégée

$$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Avec cette notation, la définition précédente se reformule en disant qu'une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\langle \xi \rangle^s \widehat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a donc deux définitions possibles pour les espaces $H^k(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$. L'équivalence entre ces deux définitions est un résultat dont la démonstration est laissée en exercice.

Il est possible d'étendre cette définition à $s \in \mathbb{R}$ en utilisant la théorie des distributions tempérées.

Définition 6.16. Soit $s \in \mathbb{R}$. On dit qu'une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ si $\langle \xi \rangle^s \widehat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. Les étudiants qui ne sont pas familiers avec la théorie des distributions peuvent se borner à considérer le cas $s \geq 0$. C'est le cas le plus important dans la pratique.

Proposition 6.17. Soit $s \in \mathbb{R}$. Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^s} = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi,$$

et donc de la norme

$$\|u\|_{H^s} = (2\pi)^{-n/2} \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}\|_{L^2},$$

l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. L'application $u \mapsto (2\pi)^{-n/2}(1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}$ est par définition une bijection isométrique de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ce dernier espace étant complet, il en est de même de $H^s(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme définie ci-dessus. \square

Rappelons que la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a été introduite à la définition 5.7.

Proposition 6.18. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout s dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Considérons l'isométrie $u \mapsto (2\pi)^{-n/2}(1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}$ de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'isométrie inverse transforme le sous-espace dense $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en un sous-espace dense de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Or cette application est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même. On en déduit que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. \square

Proposition 6.19. *Pour tout nombre réel $s > n/2$,*

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

avec injection continue.

Démonstration. D'après Cauchy-Schwarz, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$(6.3.1) \quad \|f\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{L^1} \leq \|\langle \xi \rangle^{-s}\|_{L^2} \|\langle \xi \rangle^s \widehat{f}\|_{L^2},$$

et on en déduit le résultat par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. \square

Théorème 6.20. *Pour tout nombre réel $s > n/2$, le produit de deux éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$ est encore dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. De plus, il existe une constante C telle que, pour tout u, v dans $H^s(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|uv\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}.$$

Démonstration. La preuve repose sur l'inégalité suivante : pour tout ξ, η dans \mathbb{R}^n , on a

$$\forall s \geq 0, \quad (1 + |\xi|^2)^{s/2} \leq 2^s \left\{ (1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2} + (1 + |\eta|^2)^{s/2} \right\},$$

qui se déduit de l'inégalité triangulaire et de la majoration $(a + b)^r \leq 2^r(a^r + b^r)$ pour tout triplet (a, b, r) de nombres positifs. Écrivons alors que pour tout u, v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a (vérifier la formule suivante en exercice)

$$\widehat{uv}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{u}(\xi - \eta) \widehat{v}(\eta) d\eta.$$

En multipliant les deux membres par $\langle \xi \rangle^s$ et en utilisant l'inégalité précédente, on trouve

$$\langle \xi \rangle^s |\widehat{uv}(\xi)| \leq C \int \left(\langle \xi - \eta \rangle^s |\widehat{u}(\xi - \eta)| \right) |\widehat{v}(\eta)| d\eta + C \int |\widehat{u}(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^s |\widehat{v}(\eta)| d\eta.$$

Si $s > n/2$ alors $\mathcal{F}(H^s(\mathbb{R}^n)) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ comme nous l'avons déjà vu (cf (6.3.1)). On reconnaît alors ci-dessus deux produits de convolution entre une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$ et une autre de $L^2(\mathbb{R}^n)$, qui appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ce qui implique que $\langle \xi \rangle^s \widehat{uv} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, d'où le résultat voulu $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$. \square

Nous avons vu que, tout nombre réel $s > n/2$, le produit de deux éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$ est encore dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. La proposition suivante montre que l'on peut définir également le produit φu pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et tout $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s \in [0, +\infty[$ quelconque.

Proposition 6.21. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. La preuve utilise une inégalité, appelée inégalité de Peetre, qui énonce que pour tout ξ, η dans \mathbb{R}^n , on a

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad (1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\eta|^2)^s (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|}.$$

Supposons $s \geq 0$. Pour obtenir cette inégalité, il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire

$$1 + |\xi|^2 \leq 1 + (|\eta| + |\xi - \eta|)^2 \leq 1 + 2|\eta|^2 + 2|\xi - \eta|^2 \leq 2(1 + |\eta|^2)(1 + |\xi - \eta|^2),$$

puis d'élever les deux membres à la puissance $s \geq 0$. Si $s < 0$, alors $-s > 0$ et l'inégalité précédente entraîne

$$(1 + |\eta|^2)^{-s} \leq 2^{-s} (1 + |\xi|^2)^{-s} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-s}.$$

On obtient le résultat voulu en divisant par $(1 + |\eta|^2)^{-s} (1 + |\xi|^2)^{-s}$.

On procède alors comme dans la preuve du théorème 6.20. En effet, on peut encore écrire pour $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\varphi u}(\xi)$ sous la forme d'un produit de convolution. Comme $\langle \zeta \rangle \widehat{\varphi}(\zeta)$ est dans la classe de Schwartz, l'inégalité précédente permet de faire apparaître le produit de convolution d'une fonction de L^1 et de $\langle \eta \rangle^s |\widehat{u}(\eta)|$ qui est dans L^2 . \square

Proposition 6.22 (Interpolation dans les espaces de Sobolev). *Soit $s_1 < s_2$ deux nombres réels et $s \in]s_1, s_2[$. Écrivons s sous la forme $s = \alpha s_1 + (1 - \alpha)s_2$ avec $\alpha \in [0, 1]$. Il existe une constante $C(s_1, s_2)$ telle que pour tout $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|u\|_{H^s} \leq C(s_1, s_2) \|u\|_{H^{s_1}}^\alpha \|u\|_{H^{s_2}}^{1-\alpha}.$$

Démonstration. Écrivons que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s}^2 &= (2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^{2\alpha s_1} |\widehat{u}(\xi)|^{2\alpha} \langle \xi \rangle^{2(1-\alpha)s_2} |\widehat{u}(\xi)|^{2(1-\alpha)} d\xi \end{aligned}$$

de sorte que l'inégalité voulue est une conséquence de l'inégalité d'Hölder. \square

6.3.2 Injections de Sobolev

Nous commençons par étudier l'injection des espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder.

Théorème 6.23. *Considérons $s \in]0, +\infty[$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1]$ tels que*

$$s > \frac{n}{2} + k + \alpha.$$

Alors $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans l'espace de Hölder $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ donné par la définition 5.25.

Démonstration. Nous allons montrer un résultat plus fort, valable pour tout $s \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans l'espace de Zygmund $C_*^{s-n/2}(\mathbb{R}^n)$. Le théorème s'en déduit alors car nous avons montré que $C_*^{s-n/2}(\mathbb{R}^n) \subset C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ si $s > n/2 + k + \alpha$. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Considérons sa décomposition dyadique : $u = \sum_{p \geq -1} u_p$. Alors

$$u_p(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}_p(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{C_p} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}_p(\xi) d\xi$$

où $C_p = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{p-1} \leq |\xi| \leq 2^{p+1}\}$. Alors

$$\begin{aligned} \|u_p\|_{L^\infty} &\leq (2\pi)^{-n} \int_{C_p} |\widehat{u}_p(\xi)| d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-n} \left(\int_{C_p} \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + 2^{2(p-1)}} \right)^s |\widehat{u}_p(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{C_p} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K 2^{p(n/2-s)} \|u\|_{H^s}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Nous allons maintenant étudier l'injection des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$. C'est une propriété fondamentale, que nous utiliserons par exemple plus tard dans le cadre de la théorie de De Giorgi–Nash–Moser.

Théorème 6.24. *Soit $n \geq 1$ et s un réel tel que $0 \leq s < n/2$. Alors l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout p tel que*

$$2 \leq p \leq \frac{2n}{n - 2s}.$$

Démonstration. Nous allons montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(6.3.2) \quad p = \frac{2n}{n - 2s} \quad \Rightarrow \quad \|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un résultat plus fort que celui énoncé. En effet, si $p < 2n/(n - 2s)$ alors il existe $s' \in [0, s[$ tel que $p = 2n/(n - 2s')$ et alors $\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{\dot{H}^{s'}} \leq C \|f\|_{H^s}$ (attention : on ne peut pas majorer $\|f\|_{\dot{H}^{s'}}$ par $\|f\|_{\dot{H}^s}$ car on n'a pas $|\xi|^{2s'} \leq |\xi|^{2s}$ pour $|\xi| \leq 1$).

Nous utilisons la démonstration de Chemin et Xu qui repose sur la mesure des ensembles de niveaux. Nous noterons $\{|f| > \lambda\}$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}$ et $|\{|f| > \lambda\}|$ la mesure de Lebesgue de cet ensemble.

Considérons une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On peut supposer sans perte de généralité que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$. On part de l'identité classique (voir le lemme 8.1 au chapitre 8),

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} |\{|f| > \lambda\}| d\lambda.$$

Pour majorer $|\{|f| > \lambda\}|$, nous allons utiliser une décomposition en termes de basses et hautes fréquences. Pour tout $\lambda > 0$, nous allons décomposer f sous la forme

$$f = g_\lambda + h_\lambda$$

où, pour une certaine constante A_λ à déterminer,

$$\begin{aligned} \widehat{g}_\lambda(\xi) &= \widehat{f}(\xi) & \text{si } |\xi| \leq A_\lambda, & & \widehat{g}_\lambda(\xi) = 0 & \text{si } |\xi| > A_\lambda \\ \widehat{h}_\lambda(\xi) &= 0 & \text{si } |\xi| \leq A_\lambda, & & \widehat{h}_\lambda(\xi) = \widehat{f}(\xi) & \text{si } |\xi| > A_\lambda. \end{aligned}$$

Alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\{|f| > \lambda\} \subset \{|g_\lambda| > \lambda/2\} \cup \{|h_\lambda| > \lambda/2\}.$$

Nous allons choisir la constante A_λ de sorte que $\{|g_\lambda| > \lambda/2\} = \emptyset$. Alors on aura

$$|\{|f| > \lambda\}| \leq |\{|h_\lambda| > \lambda/2\}| \leq \frac{4}{\lambda^2} \|h_\lambda\|_{L^2}^2,$$

car

$$\|h_\lambda\|_{L^2}^2 \geq \int_{\{|h_\lambda| > \lambda/2\}} |h_\lambda|^2 dx \geq \frac{\lambda^2}{4} |\{|h_\lambda| > \lambda/2\}|.$$

En combinant les observations précédentes, on conclut

$$(6.3.3) \quad \|f\|_{L^p}^p \leq 4p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-3} \|h_\lambda\|_{L^2}^2 d\lambda.$$

Choix de A_λ . D'après le théorème d'inversion de Fourier, on a

$$|g_\lambda(x)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{g}_\lambda(\xi) d\xi \right| = \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi| \leq A_\lambda} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \right|.$$

Comme $2s < n$, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et écrire que

$$|g_\lambda(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{|\xi| \leq A_\lambda} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\int_{|\xi| \leq A_\lambda} |\xi|^{-2s} d\xi = \int_0^{A_\lambda} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1-2s} d\theta dr = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}| A_\lambda^{n-2s}}{n-2s}.$$

Comme $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$ par hypothèse, on obtient finalement

$$\|g_\lambda\|_{L^\infty} \leq C_1(s, n) A_\lambda^{\frac{n}{2}-s}.$$

On définit alors A_λ par

$$C_1(s, n) A_\lambda^{\frac{n}{2}-s} = \frac{\lambda}{2}.$$

Alors $\|g_\lambda\|_{L^\infty} \leq \lambda/2$. Comme par ailleurs g_λ est une fonction continue (c'est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable), on en déduit que $\{|g_\lambda| > \lambda/2\} = \emptyset$, ce qui est le résultat voulu.

Fin de la démonstration. Par définition de h_λ , en utilisant l'identité (6.3.3) et la formule de Plancherel, on trouve

$$\|f\|_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^n \int_0^{+\infty} \int_{|\xi| \geq A_\lambda} \lambda^{p-3} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi d\lambda.$$

Par définition de A_λ , si $|\xi| \geq A_\lambda$ alors

$$\lambda \leq \Lambda(\xi) := 2C_1(s, n) |\xi|^{\frac{n}{2}-s},$$

donc, en utilisant le théorème de Fubini, il vient

$$\|f\|_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\Lambda(\xi)} \lambda^{p-3} d\lambda \right) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

d'où

$$\|f\|_{L^p}^p \leq C_2(s, n) \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda(\xi)^{p-2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

Comme $\frac{n}{2} - s = \frac{n}{p}$, on a

$$\Lambda(\xi) \leq C_1(s, n) |\xi|^{\frac{n}{p}}.$$

On obtient finalement

$$\|f\|_{L^p}^p \leq C_3(s, n) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\frac{n(p-2)}{p}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

ce qui est le résultat voulu. □

Corollaire 6.25 (Inégalités de Gagliardo-Nirenberg). Soit $n \geq 3$ et $2 \leq p < \frac{2n}{n-2}$. Alors, il existe une constante C telle que, pour tout u appartenant à $H^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\sigma} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^\sigma,$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{n(p-2)}{2p}.$$

Démonstration. Pour la valeur de σ qui est donnée par l'énoncé, il suit directement de (6.3.2) que l'on a l'inégalité $\|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{\dot{H}^\sigma}$. On déduit alors le résultat par un argument d'interpolation. Précisément, on utilise le fait que l'inégalité de la proposition 6.22 reste vraie quand on remplace les normes $\|\cdot\|_{H^s}$ par les semi-normes $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$; ce qui se démontre en remplaçant $\langle \xi \rangle$ par $|\xi|$ dans la démonstration. \square

6.4 Espaces de Sobolev définis sur un ouvert quelconque

Considérons maintenant un ouvert quelconque Ω de \mathbb{R}^n . Nous allons voir dans ce paragraphe quelques résultats techniques très utiles pour étudier les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$. Nous commencerons par étudier la règle de Leibniz dans les espaces de Sobolev. Nous verrons ensuite un critère qui permet de montrer qu'une fonction appartient à $H^1(\Omega)$ et appliqueront ce critère pour démontrer un résultat de changement de variables dans les espaces de Sobolev. Nous utiliserons aussi ce critère pour montrer comment étendre un élément de $H^1(\Omega)$ en un élément de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Rappelons que, par définition, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ admet une **dérivée au sens faible** dans $L^2(\Omega)$ par rapport à la variable x_j si il existe $v_j \in L^2(\Omega)$ telle que

$$(6.4.1) \quad \int_{\Omega} v_j \phi \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On note $v_j = \partial u / \partial x_j$ ou simplement $\partial_j u$.

Proposition 6.26. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in C_b^1(\Omega)$ (l'indice b signifie que v et ses dérivées sont des fonctions bornées sur Ω). Alors le produit uv appartient à $H^1(\Omega)$, les dérivées au sens faible vérifient

$$(6.4.2) \quad \partial_j(uv) = u \partial_j v + (\partial_j u)v, \quad j = 1, \dots, n,$$

et on a

$$(6.4.3) \quad \|uv\|_{H^1(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}.$$

Démonstration. Comme le produit d'une fonction f dans $L^\infty(\Omega)$ et d'une fonction g de $L^2(\Omega)$ appartient à $L^2(\Omega)$, on obtient que uv appartient à $L^2(\Omega)$ et que si (6.4.2) est vraie, alors on a l'estimation (6.4.3). Nous devons montrer que uv a une dérivée au sens faible dans $L^2(\Omega)$ et que la relation (6.4.2) est vérifiée. Soit $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Alors $\phi = v\varphi$ appartient à $C_0^1(\Omega)$ on peut appliquer (6.4.1) pour écrire

$$\int_{\Omega} (\partial_j u) v \varphi \, dx = - \int_{\Omega} u \partial_j (v \varphi) \, dx,$$

ce qui implique

$$- \int_{\Omega} \left(u \partial_j v + (\partial_j u) v \right) \varphi \, dx = \int_{\Omega} uv \partial_j \varphi \, dx.$$

De plus on vérifie que $u \partial_j v + (\partial_j u) v$ est une fonction de $L^2(\Omega)$ (trivialement, car u et $\partial_j u$ appartiennent à $L^2(\Omega)$ alors que v et $\partial_j v$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$). Alors, par définition de la dérivation au sens faible, on conclut que uv a une dérivée au sens faible dans $L^2(\Omega)$ par rapport à la variable x_j et que cette dérivée vérifie (6.4.2). \square

Nous montrons ensuite un critère d'appartenance à $H^1(\Omega)$ qui est basé sur un argument de dualité.

Proposition 6.27. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors u admet une dérivée au sens faible dans la direction x_j si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\phi \in C_0^1(\Omega)$,*

$$(6.4.4) \quad \left| \int_{\Omega} u \partial_j \phi \, dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si le résultat précédent est vrai pour tout $1 \leq j \leq n$.

Démonstration. Si u admet une dérivée au sens faible dans la direction x_j alors il suit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de (6.4.1) que l'inégalité (6.4.4) est vérifiée avec $C = \|\partial_j u\|_{L^2(\Omega)}$. Le point délicat est de montrer la réciproque. Pour cela considérons l'application linéaire $\Theta: C_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\Theta(\phi) = \int_{\Omega} u \partial_j \phi \, dx.$$

Cette application est bien définie (c'est immédiat) et l'inégalité (6.4.4) implique que $|\Theta(\phi)| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$. Comme $C_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, ceci signifie que l'on peut étendre Θ par continuité en une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$. Le théorème de représentation de Riesz implique l'existence d'une fonction $w_j \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\Theta(\phi) = (\phi, w_j) = \int_{\Omega} \phi \overline{w_j} \, dx.$$

En posant $v_j = -\overline{w_j}$, on obtient (6.4.1) ce qui démontre le résultat voulu. \square

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que la notion d'espace de Sobolev est invariante par difféomorphisme.

Proposition 6.28. *Considérons deux ouverts Ω_1 et Ω_2 ainsi qu'une bijection $\theta: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ telle que :*

- $\theta \in C^1(\Omega_1)$, $\theta^{-1} \in C^1(\Omega_2)$;
- $\nabla\theta$ est bornée sur Ω_1 , $\nabla\theta^{-1}$ est bornée sur Ω_2 .

Si $u \in H^1(\Omega_2)$, alors $u \circ \theta \in H^1(\Omega_1)$ et de plus, les dérivées au sens faible de $u \circ \theta$ sont données par

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u \circ \theta) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \circ \theta \right) \frac{\partial \theta_k}{\partial x_j},$$

où $1 \leq j \leq n$ et où on a noté θ_k la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de θ ($\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$).

Démonstration. Nous donnons la démonstration uniquement dans le cas $n = 1$, $\Omega_1 =]a, b[$ et $\Omega_2 = \theta(]a, b[) =]c, d[$ et renvoyons au livre de Brézis pour le cas général. Considérons $u \in H^1(]c, d[)$. Le fait que $u \circ \theta$ appartient à $L^2(]a, b[)$ provient des résultats généraux sur l'intégration. Aussi, il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\phi \in C_0^1(]a, b[)$, on a

$$\left| \int_a^b u(\theta(x))\phi'(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(]a, b[)}.$$

En posant $y = \theta(x)$, on vérifie que

$$\left| \int_a^b u(\theta(x))\phi'(x) dx \right| = \left| \int_c^d u(y)\phi'(\theta^{-1}(y)) (\theta^{-1})'(y) dy \right|.$$

Posons $\varphi = \phi \circ \theta^{-1}$. En écrivant $\phi'(\theta^{-1}(y))(\theta^{-1})'(y) = \varphi'$, on voit que

$$\left| \int_a^b u(\theta(x))\phi'(x) dx \right| = \left| \int_c^d u(y)\varphi'(y) dy \right|.$$

Or, comme $u \in H^1(]c, d[)$, par définition de la dérivation au sens faible et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \int_c^d u(y)\varphi'(y) dy \right| = \left| \int_c^d u'(y)\varphi(y) dy \right| \leq \|u'\|_{L^2(]c, d[)} \|\varphi\|_{L^2(]c, d[)}.$$

Ce qui conclut la démonstration car $\|\varphi\|_{L^2(]c, d[)} \leq C \|\phi\|_{L^2(]a, b[)}$ comme on peut le voir en utilisant encore une fois la formule de changement de variables pour une intégrale et l'hypothèse que la dérivée de θ est bornée. \square

Rappelons que l'espace $H_0^1(\Omega)$ a été défini au début de ce chapitre comme étant l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Proposition 6.29. Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n . Etant donné une fonction u définie sur Ω , notons \tilde{u} la fonction définie par

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Alors, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, la fonction \tilde{u} appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Soit $v \in H^1(\Omega)$. Nous avons déjà vu qu'il existe une constante C telle que, pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $\phi \in C_0^1(\Omega)$,

$$\left| \int_{\Omega} v(\partial_j \phi) \, dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le point clé est de montrer que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$(6.4.5) \quad \left| \int_{\Omega} u(\partial_j \phi) \, dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

pour toute fonction $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ (insistons sur le fait que l'on ne suppose pas que ϕ est à support dans Ω). Pour obtenir ce résultat, notons que par définition de $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite (u_n) de fonctions appartenant à $C_0^1(\Omega)$ et qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$. Pour toute fonction φ qui est C^1 et à support compact dans \mathbb{R}^n , on obtient que

$$\left| \int_{\Omega} u_n(\partial_j \phi) \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} (\partial_j u_n) \phi \, dx \right| \leq \|\partial_j u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

En passant à la limite on obtient (6.4.5). Maintenant, pour tout $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, on a directement

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(\partial_j \phi) \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} u(\partial_j \phi) \, dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

D'après la proposition 6.27, ceci implique que \tilde{u} appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$. \square

Proposition 6.30. Soit Ω un ouvert borné. Supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction à support compact et que $\text{supp } u$ est à une distance strictement positive de $\partial\Omega$. Alors $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. La démonstration est similaire à ce qui précède. On admet le résultat. \square

La proposition suivante donne un autre exemple de situation où l'on peut prolonger explicitement une fonction à \mathbb{R}^n en préservant la propriété d'appartenir à un espace de Sobolev.

Proposition 6.31. Notons \mathbb{R}_+^n le demi-espace tel que $x_n > 0$. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$. Notons u^* la fonction définie sur \mathbb{R}^n par

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n \geq 0, \\ u(x', -x_n) & \text{si } x_n < 0, \end{cases}$$

où $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Alors $u^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et l'application $u \mapsto u^*$ est continue de $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ avec une norme d'opérateur majorée par 2.

Remarque 6.32. Soit B la boule de centre 0 et de rayon 1. Notons $B_+ = B \cap \mathbb{R}_+^n$. Nous utiliserons ci-dessous le fait que le résultat précédent est vrai lorsqu'on remplace \mathbb{R}_+^n par B_+ et \mathbb{R}^n par B . La démonstration est la même.

Démonstration. Admis. Voir le livre de Brézis. □

Pour certains ouverts Ω , en combinant les deux résultats précédents, nous allons pouvoir étendre n'importe quelle fonction $u \in H^1(\Omega)$. Pour cela il faut faire une hypothèse sur Ω qui va nous permettre de se ramener au deux cas traités précédemment. Introduisons les notations suivantes :

$$B = B(0, 1), \quad B_+ = B \cap \{(x', x_n); x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}, \quad B_0 = B \cap \{(x', 0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

Définition 6.33. On dit que Ω est de classe C^1 si Ω est un ouvert dont la frontière $\partial\Omega$ est bornée et s'il existe un nombre fini d'ouverts U_i et d'applications $\theta_i: \overline{U_i} \rightarrow \overline{B}$, $1 \leq i \leq N$, tels que

1. $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^N U_i$,
2. θ_i est une bijection de $\overline{U_i}$ sur \overline{B} telle que $\theta_i \in C^1(\overline{U_i})$, $\theta_i^{-1} \in C^1(\overline{B})$ et

$$\theta_i^{-1}(B_+) = U_i \cap \Omega, \quad \theta_i^{-1}(B_0) = U_i \cap \partial\Omega.$$

Théorème 6.34. Si Ω est un ouvert C^1 , alors il existe un opérateur linéaire d'extension E borné de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, la restriction de Eu à Ω est égale à u et tel que $\|Eu\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Démonstration. Posons $O = \Omega \cup_{i=0}^N U_i$. D'après le théorème des partitions de l'unité, il existe des applications ζ_0, \dots, ζ_N telles que, pour tout indice $0 \leq i \leq N$, ζ_i vérifie les propriétés suivantes :

1. $\zeta_i \in C^\infty(\overline{O})$, $0 \leq \zeta_i \leq 1$,
2. pour tout $x \in O$, on a $\sum_{i=0}^N \zeta_i(x) = 1$,
3. $\zeta_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\zeta_i \in C_0^\infty(U_i)$ pour $1 \leq i \leq N$.

Pour $0 \leq i \leq N$, notons $u_i = \zeta_i u$. On définit $v_0 = \widetilde{u}_0$. Alors $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Pour $1 \leq i \leq N$, on commence par définir $w_i = u_i \circ \theta_i^{-1}$. Cette fonction appartient à $H^1(B_+)$. On peut l'étendre en une fonction w_i^* appartenant à $H^1(B)$. Alors $w_i \circ \theta_i$ appartient à $H^1(U_i)$ et la fonction $\zeta_i w_i$ appartient à $H_0^1(U_i)$. On pose alors $v_i = \widetilde{\zeta_i w_i}$, c'est-à-dire que l'on prolonge $\zeta_i w_i$ par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus U_i$. Alors la fonction v définie par $v = v_0 + \sum_{i=1}^N v_i$ vérifie $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $v|_\Omega = u$. De plus l'opérateur $P: u \mapsto v$ est linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. \square

Corollaire 6.35. *Si Ω est un ouvert C^1 , alors $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors l'extension $v = Pu \in H^1(\mathbb{R}^n)$ est la limite dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ d'une suite de fonctions appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. En restreignant ces fonctions à Ω , on obtient une suite de fonctions $C^\infty(\overline{\Omega})$ qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$. \square

6.5 Injections compactes

Nous allons voir dans ce paragraphe comment déduire du résultat précédent sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ un résultat analogue sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ où Ω est un ouvert quelconque. Dans ce contexte, en supposant que Ω est bornée, nous pourrions de plus obtenir des injections compactes.

Théorème 6.36 (Théorème de Rellich-Kondrachov). *Soit $n \geq 2$ et soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n quelconque. Si $2 \leq q < 2n/(n-2)$, alors $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\Omega)$.*

Démonstration. Considérons une suite (u_m) qui est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Alors cette suite admet une sous-suite $(u_{\theta(m)})$ convergeant faiblement dans $H^1(\Omega)$ car $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Notons $u \in H^1(\Omega)$ la limite faible. Comme $H_0^1(\Omega)$ est fermé par définition, il est aussi fermé au sens faible d'après la proposition 4.16, et on en déduit que $u \in H_0^1(\Omega)$. Quitte à remplacer u_m par $u_{\theta(m)} - u$, on peut supposer sans perte de généralité que la suite (u_m) converge faiblement vers 0 dans $H^1(\Omega)$. Pour démontrer le théorème, nous devons montrer que (u_m) converge fortement vers 0 dans $L^q(\Omega)$ pour $2 \leq q < 2n/(n-2)$.

Lemme 6.37. *Notons \widetilde{u}_m la fonction obtenue en prolongeant u_m par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Alors \widetilde{u}_m appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$, la suite (\widetilde{u}_m) est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et converge faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. La proposition 6.29 implique que (\widetilde{u}_m) est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, la démonstration de la proposition 6.29 montre que la dérivée au sens faible de \widetilde{u}_m vérifie $\partial_j \widetilde{u}_m = \widetilde{\partial_j u_m}$. Alors, en notant $(\cdot, \cdot)_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ le produit scalaire de $H^1(\mathbb{R}^n)$, pour tout $v \in$

$H^1(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire que

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_m, v)_{H^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_m v \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \tilde{u}_m \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_m v \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\nabla u_m} \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} u_m v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla v \, dx = (u_m, v)_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Or $(u_m, v)_{H^1(\Omega)}$ converge vers 0 quand m tend vers $+\infty$. Ceci montre que \tilde{u}_m converge faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui conclut la démonstration du lemme. \square

La démonstration du théorème de Rellich-Kondrachov repose alors essentiellement sur le lemme suivant.

Lemme 6.38. *Soit (w_m) une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et convergeant faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout $2 \leq q < 2n/(n-2)$ et pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la suite (χw_m) converge fortement vers 0 dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. La démonstration est en deux étapes. On montre d'abord le résultat pour $q = 2$ puis on considère le cas général.

Cas $q = 2$. Posons $v_m = \chi w_m$. Comme la multiplication par une fonction de la classe de Schwartz est continue de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, on en déduit que la suite (v_m) est aussi bornée dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, $v_m = \chi w_m$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ en utilisant le fait que v_m est à support compact. On peut alors considérer sa transformée de Fourier

$$\widehat{v}_m(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \chi(x) w_m(x) \, dx.$$

D'après l'identité de Plancherel, pour montrer que (v_m) converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, il nous suffit de montrer que (\widehat{v}_m) converge fortement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour cela utilisons la décomposition

$$\int |\widehat{v}_m(\xi)|^2 \, d\xi \leq \int_{|\xi| \leq R} |\widehat{v}_m(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{|\xi| > R} |\widehat{v}_m(\xi)|^2 \, d\xi,$$

où R est un paramètre arbitraire. La convergence faible de (u_m) vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ entraîne que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{v}_m(\xi)$ converge vers 0 quand m tend vers $+\infty$. D'après ce qui précède, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour montrer que $\int_{|\xi| \leq R} |\widehat{v}_m(\xi)|^2 \, d\xi$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$. Par ailleurs, on a la majoration évidente

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| > R} |\widehat{v}_m(\xi)|^2 \, d\xi &\leq \frac{1}{1+R^2} \int_{|\xi| > R} (1+|\xi|^2) |\widehat{v}_m(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leq \frac{1}{1+R^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2) |\widehat{v}_m(\xi)|^2 \, dx = \frac{(2\pi)^n}{1+R^2} \|v_m\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Comme (v_m) est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, on peut rendre le terme $\int_{|\xi|>R} |\widehat{v_m}(\xi)|^2 d\xi$ arbitrairement petit en prenant R assez grand. Ce qui achève de démontrer que (v_m) converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Cas général. Soit $2 \leq q < 2n/(n-2)$. Alors il existe $C > 0$ et $\lambda \in [0, 1[$ tels que, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{L^2}^{1-\lambda} \|u\|_{L^{2n/(n-2)}}^\lambda.$$

Nous avons vu plus que la suite (v_m) est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. Le théorème d'injection de Sobolev implique que $v_m \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n)$ et que (v_m) est bornée dans $L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n)$. Le résultat voulu se déduit alors de l'inégalité précédente et du lemme précédent qui implique que $\|v_m\|_{L^2}$ converge vers 0. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème. Considérons une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui est telle que $\chi(x) = 1$ pour $x \in \Omega$. Une telle fonction existe car Ω est borné par hypothèse. En utilisant les deux lemmes précédents on obtient que la suite $(\chi \tilde{u}_m)$ converge vers 0 fortement dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique directement que (u_m) converge vers 0 fortement dans $L^q(\Omega)$. \square

La démonstration précédente utilise cruciallement une propriété des éléments de $H_0^1(\Omega)$, à savoir que si on les prolonge par 0 en dehors de Ω , on obtient une fonction qui appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$. Si Ω est un ouvert C^1 , on a vu qu'il existe un opérateur d'extension. En procédant comme ci-dessus, on peut en déduire le résultat suivant.

Théorème 6.39 (Théorème de Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 (ou le produit de n intervalles ouverts bornés).*

- Si $n \geq 2$ et $2 \leq q < 2n/(n-2)$, $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\Omega)$.
- Si $n = 1$, $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\overline{\Omega})$.

Nous avons vu au début de ce chapitre l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (lemme 6.7). Nous allons maintenant déduire des injections de Sobolev une généralisation en dimension quelconque.

Théorème 6.40 (Inégalité de Poincaré-Sobolev). *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 (ou le produit de n intervalles ouverts bornés). Etant donnée une fonction $u \in H^1(\Omega)$, notons u_Ω sa moyenne sur Ω . Il existe une constante $C(\Omega)$ telle que*

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que ce résultat est faux. Alors on peut trouver une suite (u_n) d'éléments de $H^1(\Omega)$ tels que

$$\int_{\Omega} u_n(x) dx = 0, \quad \int_{\Omega} |u_n(x)|^2 dx = 1, \quad \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx \leq \frac{1}{n}.$$

Comme (u_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction u . Comme ∇u_{n_k} converge fortement vers 0 dans L^2 , on en déduit que (u_{n_k}) est en fait une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, qui converge dans $H^1(\Omega)$. On en déduit que

$$\int_{\Omega} u(x) \, dx = 0, \quad \int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx = 1, \quad \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx = 0.$$

Donc u est une fonction non nulle, constante et nulle en moyenne. D'où la contradiction. \square

Le résultat précédent n'est pas quantitatif dans la mesure où il ne dit pas comment la constante $C(\Omega)$ dépend de Ω . Payne et Weinberger ont démontré le résultat suivant : si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine ouvert et convexe, alors pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^2} \leq \frac{\text{diam } \Omega}{\pi} \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Pour conclure cette partie, nous allons reproduire ici la démonstration donnée par Poincaré de l'inégalité qui porte son nom. Cette démonstration est très élégante.

Théorème 6.41. *Soit $n \geq 1$. Il existe une constante $C = C(n)$ telle que, pour tout $r > 0$ et pour toute boule B de rayon r dans \mathbb{R}^n , pour tout $u \in H^1(B)$, on a*

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |u - u_B|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq Cr \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

où u_B est la moyenne de u sur B .

Démonstration. On peut supposer que u est à valeurs réelles. La démonstration est basée sur un argument de duplication :

$$\frac{1}{|B|} \int_B u^2 \, dx = \frac{1}{2|B|} \int_B u^2(x) \, dx + \frac{1}{2|B|} \int_B u^2(y) \, dy.$$

Notons qu'on on peut supposer sans perte de généralité que $u_B = 0$, de sorte que

$$\frac{1}{|B|} \int_B u^2 \, dx = \frac{1}{2|B|^2} \iint_{B^2} (u(x) - u(y))^2 \, dx \, dy.$$

Par ailleurs

$$(u(x) - u(y))^2 \leq |x - y|^2 \int_0^1 |\nabla u(tx + (1-t)y)|^2 \, dt \leq (2r)^2 \int_0^1 |\nabla u(tx + (1-t)y)|^2 \, dt.$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \iint_{B^2} |\nabla u(tx + (1-t)y)|^2 \, dx \, dy &= \frac{1}{t^n} \int_B \int_{tB+(1-t)y} |\nabla u(\sigma)|^2 \, d\sigma \, dy \\ &= \frac{1}{t^n} \int_B \int_B \mathbb{1}_{tB+(1-t)y}(\sigma) |\nabla u(\sigma)|^2 \, d\sigma \, dy, \end{aligned}$$

et

$$\int_B \mathbf{1}_{tB+(1-t)y}(\sigma) \, dy = \left| B \cap \frac{1}{1-t}(\sigma - tB) \right| \leq \min \left(1, \frac{t^n}{(1-t)^n} \right) |B|.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{|B|} \int_B u^2 \, dx \leq \frac{(2r)^2}{2|B|} \left\{ \int_0^1 \min \left(1, \frac{t^n}{(1-t)^n} \right) \frac{dt}{t^n} \right\} \int_B |\nabla u|^2 \, dx,$$

ce qui conclut la démonstration. \square

6.6 Traces et problème de Dirichlet inhomogène

Dans ce paragraphe, on suppose de plus que Ω désigne un ouvert borné, connexe et C^∞ . Sous ces hypothèses on dispose des résultats suivants, que l'on admet.

Théorème 6.42. *i) L'application γ de restriction au bord, de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $C^\infty(\partial\Omega)$ se prolonge en une application linéaire continue surjective, notée encore γ , de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\partial\Omega)$.*

ii) Notons $H^{1/2}(\partial\Omega)$ l'image de $H^1(\Omega)$ par l'opérateur γ , que l'on munit de la norme

$$\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{\gamma u = v} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Il existe un opérateur de relevement R , borné de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, tel que

$$\forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad \gamma(Rv) = v.$$

Théorème 6.43. *Soit $u \in H^1(\Omega)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\gamma u = 0$.
2. la fonction égale à u dans Ω et 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.
3. il existe une suite d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers u .

Théorème 6.44. *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et tout $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, le problème de Dirichlet*

$$-\Delta u + Vu = f, \quad u|_{\partial\Omega} = g,$$

a une unique solution faible $u \in H^1(\Omega)$.

Démonstration. On se ramène à considérer un problème de Dirichlet avec une condition au bord nulle. Pour cela on cherche la solution u sous la forme $u = U + R(g)$ avec de trace nulle sur le bord, de sorte que $\gamma(u) = \gamma(R(g)) = g$. Alors u sera solution de $-\Delta u + Vu = f$ si et seulement si

$$-\Delta U + VU = f + \Delta R(g) - VR(g).$$

Comme $R(g) \in H^1(\Omega)$, on vérifie que $F + \Delta R(g) - VR(g)$ appartient au dual de $H_0^1(\Omega)$ et on peut résoudre le problème précédent à l'aide du théorème de Riesz. \square

Chapitre 7

Fonctions harmoniques

7.1 Propriété de la moyenne

Soit $n \geq 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné quelconque.

Définition 7.1. Soit $u \in C^2(\Omega)$ une fonction à valeurs réelles. On dit que u est harmonique si

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u = 0.$$

Les fonctions harmoniques sont des fonctions remarquables. La propriété la plus spectaculaire qu'elles vérifient est la propriété de la moyenne qui énonce que $u(x)$ coïncide avec la moyenne de u sur toute boule centrée en x .

Théorème 7.2. Soit $u \in C^2(\Omega)$. Alors u est harmonique si et seulement si u vérifie la propriété de la moyenne : pour tout $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$ on a

$$u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) \, dy.$$

Démonstration. Introduisons la fonction

$$\phi(r) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) \, dy = \frac{1}{|B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} u(x + r\zeta) \, d\zeta.$$

Comme $\phi(r)$ converge vers $u(x)$ lorsque r tend vers 0, il nous suffit de montrer que $\phi(r)$ est constante ou encore que $\phi'(r) = 0$. En dérivant l'intégrale puis en exploitant le fait que $\Delta u = 0$, on vérifie que

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{|B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} \zeta \cdot (\nabla u)(x + r\zeta) \, d\zeta \\ &= \frac{1}{|B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} \operatorname{div}_{\zeta} \left(|\zeta|^2 (\nabla u)(x + r\zeta) \right) \, d\zeta. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de la divergence, qui énonce que pour un champ de vecteurs $X \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$ où U est un ouvert C^1 de \mathbb{R}^n (une boule est un ouvert C^1), on a

$$\int_U \operatorname{div} X \, dx = \int_{\partial U} X \cdot n \, dS.$$

Comme $|\zeta| = 1$ sur le bord de la boule $B(0, 1)$, ceci implique que

$$\phi'(r) = \frac{1}{|B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \partial_n u(x + r\zeta) \, dS(\zeta).$$

Or, en utilisant à nouveau la formule de la divergence et le fait que $\Delta u = 0$, on a

$$0 = \int_{B(x, r)} \Delta u \, dx = \int_{\partial B(x, r)} \partial_n u(y) \, dS(y).$$

En combinant les résultats précédents on obtient le résultat voulu. \square

Nous allons voir plusieurs conséquences de la propriété de la moyenne. Commençons par le principe du maximum qui énonce que le maximum est atteint au bord.

Théorème 7.3. *Soit Ω un ensemble connexe. Si $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ est une fonction harmonique, alors*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

De plus, s'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$, alors u est constante sur Ω .

Démonstration. Supposons qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = M := \max_{\bar{\Omega}} u$. Considérons une boule $B(x_0, r) \subset \Omega$. Alors

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} u(y) \, dy \leq M$$

et on a nécessairement $u(y) = M$ pour $y \in B(x_0, r)$. Ainsi l'ensemble $\{x \in \Omega : u(x) = M\}$ est relativement ouvert et fermé, et donc égal à Ω par connexité. \square

On en déduit le résultat d'unicité suivant.

Corollaire 7.4. *Si $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ vérifie*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors $u = 0$. En particulier, si $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ est harmonique, alors $u = 0$.

Démonstration. Le principe du maximum implique que $\max u \leq 0$. Comme $-u$ vérifie les mêmes propriétés on a aussi $\min u \geq 0$, donc $u = 0$. \square

Le résultat suivant est une autre traduction de l'effet de moyennisation : le supremum d'une fonction harmonique peut être contrôlé par son infimum. Nous reviendrons plus tard sur ce résultat, dans le cadre beaucoup plus difficile des équations à coefficients variables.

Théorème 7.5 (Inégalité d'Harnack). *Pour chaque sous-ensemble ouvert connexe $\omega \subset \Omega$ relativement compact, il existe une constante C telle que, pour toute fonction harmonique u positive (à valeurs dans \mathbb{R}_+^*), on a*

$$\sup_{\omega} u \leq C \inf_{\omega} u.$$

Démonstration. Soit $r = \frac{1}{4} \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$ et choisissons x, y dans ω tels que $|x - y| \leq r$. Alors

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{|B(x, 2r)|} \int_{B(x, 2r)} u \, dz \geq \frac{1}{|B(x, 2r)|} \int_{B(y, r)} u \, dz \\ &= \frac{|B(y, r)|}{|B(x, 2r)|} \frac{1}{|B(y, r)|} \int_{B(y, r)} u \, dz = \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

Donc $2^n u(y) \geq u(x) \geq 2^{-n} u(y)$ si x, y appartiennent à ω et $|x - y| \leq r$.

Puisque ω est un ouvert connexe, il est connexe par arcs. Comme de plus $\bar{\omega}$ est compact, on peut couvrir $\bar{\omega}$ par une suite de boules $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ toutes de rayon r et telles que $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq N - 1$. On en déduit que $u(x) \geq 2^{-nN} u(y)$ pour tout x, y dans ω . \square

7.2 Solution fondamentale du Laplacien

Nous allons maintenant introduire la notion de solution fondamentale du Laplacien sur \mathbb{R}^n et l'utiliser pour avoir une formule de représentation d'une fonction à partir de son gradient, ce qui nous servira plus loin à démontrer les inégalités de Sobolev.

Pour trouver des exemples non triviaux de fonctions harmoniques, on peut commencer par chercher des fonctions u radiales, de la forme $u(x) = v(|x|)$ où v est définie sur $]0, +\infty[$. En procédant ainsi on obtient les solutions particulières suivantes

$$u(x) = \begin{cases} a \log(|x|) + b & \text{si } n = 2, \\ \frac{a}{|x|^{n-2}} + b & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Définition 7.6. *On appelle solution fondamentale du Laplacien la fonction*

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(|x|) & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{(n-2) |S^{n-1}| |x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

où $|S^{n-1}|$ est la mesure de la sphère $\partial B(0, 1)$.

Alors, avec ce choix, on obtient le résultat suivant.

Proposition 7.7. *Supposons que $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Alors la fonction u , définie par l'intégrale convergente*

$$(7.2.1) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)f(y) \, dy,$$

est de classe C^2 sur \mathbb{R}^n et de plus

$$-\Delta u = f.$$

Remarque. On peut étendre ce résultat pour considérer des fonctions f moins régulières et qui ne sont pas à support compact. Pour nos besoins, ce qui est important est uniquement de disposer d'une formule de représentation pour les fonctions C^∞ à support compact.

Démonstration. Nous considérons le cas $n \geq 3$ (le cas $n = 2$ est similaire). Le fait que u soit C^2 s'obtient en écrivant

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)f(x-y) \, dy,$$

et en utilisant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Mais attention : on ne peut pas utiliser ce résultat pour calculer Δu à partir de la formule (7.2.1) car la fonction $\Delta \varphi$ n'est pas intégrable (si on pouvait dériver sous l'intégrale on trouverait $\Delta u = 0$ car $\Delta \varphi = 0$, or nous allons démontrer que $\Delta u = -f$ qui est non nulle en général). Pour contourner cette difficulté, introduisons

$$\varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}(|y|^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{n-2}{2}} \quad \text{et} \quad u_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(y)f(x-y) \, dy,$$

où $\varepsilon > 0$. Alors $u_\varepsilon \in C^2$ et, en utilisant le théorème de convergence dominée, on trouve que $\Delta u_\varepsilon(x)$ converge vers $\Delta u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Par ailleurs, en intégrant par parties, on a

$$\Delta u_\varepsilon(x) = - \int (\Delta \varphi_\varepsilon(y))f(x-y) \, dy.$$

Un calcul direct nous donne que

$$\Delta \varphi_\varepsilon(y) = - \frac{n}{|S^{n-1}|} \frac{\varepsilon^2}{(|y|^2 + \varepsilon^2)^{1+n/2}},$$

aussi on obtient, après un changement de variables élémentaire,

$$\Delta u_\varepsilon(x) = - \frac{n}{|S^{n-1}|} \int \frac{f(x-\varepsilon z)}{(1+|z|^2)^{1+n/2}} \, dz.$$

Pour démontrer que $-\Delta u(x) = f(x)$, il ne reste plus qu'à vérifier que

$$(7.2.2) \quad \int \frac{1}{(1 + |z|^2)^{1+n/2}} dz = \frac{|S^{n-1}|}{n}.$$

Pour cela on va calculer l'intégrale en coordonnées polaires et faire le changement de variable $r = 1/s$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 + |z|^2)^{1+n/2}} dz &= |S^{n-1}| \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{1+n/2}} dr \\ &= |S^{n-1}| \int_0^{+\infty} \frac{s}{(1 + s^2)^{1+n/2}} ds = |S^{n-1}| \left[-\frac{1}{n(1 + s^2)^{n/2}} \right]_0^{+\infty}, \end{aligned}$$

ce qui démontre (7.2.2) et conclut la démonstration. \square

Nous allons en déduire une formule de représentation de u à partir de son gradient.

Corollaire 7.8. *Supposons que $n \geq 2$. Pour toute fonction $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$(7.2.3) \quad u(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x - y) \cdot \nabla u(y)}{|x - y|^n} dy.$$

Démonstration. On peut montrer ce résultat par plusieurs calculs directs. Nous choisissons de le déduire de la proposition précédente pour mieux expliquer d'où provient cette identité remarquable. Ecrivons que $-\Delta u = f$ avec $f = -\operatorname{div}(\nabla u)$. Alors

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) \operatorname{div}(\nabla u(y)) dy.$$

Formellement, le résultat (7.2.3) s'obtient en intégrant par parties :

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \varphi)(x - y) \cdot \nabla u(y) dy,$$

car, pour $n = 2$ et aussi pour $n \geq 3$, on a

$$\nabla \varphi(z) = -\frac{1}{|S^{n-1}|} \frac{z}{|z|^n}.$$

Pour justifier cette intégration par parties, il faut être soigneux car la fonction φ est singulière à l'origine. Pour cela, nous allons écrire que

$$(7.2.4) \quad \varphi(x - y) \operatorname{div}(\nabla u(y)) = \operatorname{div}(\varphi(x - y) \nabla u(y)) + (\nabla \varphi)(x - y) \cdot \nabla u(y),$$

puis, étant donné $\varepsilon, R > 0$, on intègre cette relation sur la couronne $B(x, R) \setminus B(x, \varepsilon)$ et on fait tendre R vers $+\infty$ et ε vers 0. Il suffit de vérifier que l'intégrale de $\operatorname{div}(\varphi(x - y) \nabla u(y))$ converge vers 0. Pour cela, utilisons le théorème de la divergence :

$$\begin{aligned} \int_{B(x, R) \setminus B(x, \varepsilon)} \operatorname{div}(\varphi(x - y) \nabla u(y)) dy &= \int_{\partial B(x, R)} \varphi(x - y) \partial_n u(y) dS(y) \\ &\quad - \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \varphi(x - y) \partial_n u(y) dS(y). \end{aligned}$$

Le premier terme s'annule pour R assez grand car u est à support compact. Pour le second terme, on utilise la majoration

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \varphi(x - y) \partial_n u(y) \, dS(y) \right| \leq |\partial B(0, \varepsilon)| \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B(0, \varepsilon))} \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

et on note que la norme L^∞ de φ sur la sphère $\partial B(0, \varepsilon)$ est $O(\varepsilon^{2-n} |\log \varepsilon|)$ (en toute dimension). Donc en multipliant ceci par la mesure de la sphère $\partial B(0, \varepsilon)$, on obtient une quantité négligeable quand ε tend vers 0, ce qui conclut la démonstration. \square

Pour conclure, nous nous intéressons à la régularité des fonctions harmoniques au sens faible. Par définition, une fonction $u \in H^1(\Omega)$ à valeurs réelles est harmonique au sens faible si

$$(7.2.5) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Notons que si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifie $\Delta u = 0$ ponctuellement alors $u \in H^1(\Omega)$ et (7.2.5) est vérifiée.

Théorème 7.9 (Théorème de Weyl). *Si $u \in H^1(\Omega)$ est harmonique alors $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat nous choisissons une démonstration qui utilise l'inégalité de Caccioppoli (ce lemme est fondamental et nous en aurons besoin pour étudier la théorie de De Giorgi-Nash-Moser).

Lemme 7.10 (Inégalité de Caccioppoli). *Supposons que $u \in C^\infty(\Omega)$ est harmonique et considérons deux boules concentriques $B(r) \subset\subset B(R) \subset\subset \Omega$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{16}{(R-r)^2} \int_{B(R) \setminus B(r)} |u - c|^2 \, dx.$$

Démonstration. Introduisons une fonction $\eta \in C_0^\infty(B(R))$, $0 \leq \eta \leq 1$ telle que

$$\eta|_{B(r)} = 1, \quad |\nabla \eta| \leq \frac{2}{R-r}.$$

Posons $\varphi = (u - c)\eta^2$ (qui appartient à $C_0^\infty(\Omega)$). Comme u est harmonique nous avons $\int_{\Omega} \varphi \Delta u \, dx = 0$ (l'intégrale est bien définie car φ est à support compact). En intégrant par parties, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \left(\eta^2 \nabla u + 2(u - c)\eta \nabla \eta \right) \, dx = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta^2 |\nabla u|^2 \, dx &\leq 2 \int_{\Omega} |u - c| \eta |\nabla u| |\nabla \eta| \, dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\Omega} |u - c|^2 |\nabla \eta|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \eta^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui implique immédiatement le résultat voulu. \square

Lemme 7.11. *Considérons une boule $B(R) \subset\subset \Omega$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $K(R, k)$ telle que pour tout $u \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant $\Delta u = 0$ on a*

$$\int_{B(R/2)} |\nabla^k u|^2 dx \leq K(R, k) \int_{B(R)} u^2 dx.$$

Démonstration. Le lemme précédent implique que pour tout $R' < R$,

$$\int_{B(R')} |\nabla u|^2 dx \leq C(R, R') \int_{B(R)} |u|^2 dx.$$

Si $u \in C^\infty(\Omega)$ et $\Delta u = 0$ alors les dérivées de u sont harmoniques. L'inégalité précédente peut être appliquée avec les dérivées de u et on en déduit que

$$\int_{B(R'')} |\nabla^2 u|^2 dx \leq nC(R', R'') \int_{B(R')} |\nabla u|^2 dx \leq nC(R', R'')C(R, R') \int_{B(R)} |u|^2 dx.$$

On obtient le résultat voulu en itérant cet argument. \square

Introduisons une approximation de l'identité $\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n} \phi(y/\varepsilon)$, $\phi \in C_0^\infty$, $\phi \geq 0$, $\int \phi = 1$, et posons

$$u_\varepsilon(x) = \int u(x-y) \phi_\varepsilon(y) dy.$$

Si $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ alors $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ où $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. De plus u_ε est harmonique car

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx &= \int \left(\int u(y) \nabla_x \phi_\varepsilon(x-y) dy \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ &= \int \left(\int \nabla_x u(x-y) \phi_\varepsilon(y) dy \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ &= \int \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x u(x-y) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right) \phi_\varepsilon(y) dy = 0. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'inégalité du lemme précédent à u_ε . Comme u_ε converge vers u dans $L^2(B(R))$, on obtient que u_ε est une suite de Cauchy dans $H^k(B(R/2))$ et en passant à la limite on obtient que $u \in H^k(B(R/2))$. Ce qui prouve que, pour tout $s \in \mathbb{N}$ il existe $R_s > 0$ tel que $u \in H^s(B(R_s))$ et on conclut la démonstration du théorème de Weyl en utilisant l'injection de Sobolev $H^s \subset C^{[s-n/2]}$. \square

Nous allons voir d'autres applications de l'inégalité de Caccioppoli.

Proposition 7.12. *Si $u \in H^1(\Omega)$ est harmonique au sens faible, alors il existe une constante $\theta < 1$ telle que, pour tout $r \geq 1$ et pour toute boule $B(r)$ incluse dans Ω ,*

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2 dx \leq \theta \int_{B(2r)} |\nabla u|^2 dx.$$

Démonstration. Nous avons vu que pour tout c ,

$$(7.2.6) \quad \int_{B(r)} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{16}{r^2} \int_{B(2r) \setminus B(r)} |u - c|^2 dx.$$

On va appliquer cette inégalité avec $c = u_{B(2r) \setminus B(r)}$ (la moyenne de u sur $B(2r) \setminus B(r)$). Nous avons vu dans la démonstration de l'inégalité de Poincaré que si Ω est inclus dans une bande $\{(x', y) : |y| \leq R\}$ alors la constante $C(\Omega)$ dans l'inégalité de Poincaré peut-être majorée par $2R$. En particulier

$$C(B(2r) \setminus B(r)) \leq C(n)r$$

et on en déduit que

$$\int_{B(2r) \setminus B(r)} |u - c|^2 dx \leq C(n)r \int_{B(2r) \setminus B(r)} |\nabla u|^2 dx.$$

En combinant cette inégalité avec (7.2.6) on trouve qu'il existe $C'(n)$ telle que pour tout $r \geq 1$,

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2 dx \leq C'(n) \int_{B(2r) \setminus B(r)} |\nabla u|^2 dx.$$

Maintenant nous ajoutons $\int_{B(r)} |\nabla u|^2 dx$ aux deux membres de cette inégalité pour en déduire le résultat voulu avec $\theta = C(n)/(1 + C(n)) < 1$. \square

Corollaire 7.13. *Si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ est une fonction harmonique alors u est constante.*

Démonstration. En passant à la limite dans l'inégalité de la proposition précédente quand $r \rightarrow +\infty$ on obtient que $\nabla u = 0$. \square

Chapitre 8

Fonction maximale et applications

8.1 Fonction de distribution

Il est souvent utile pour étudier une fonction d'étudier ses ensembles de niveaux. Précisément, pour étudier les normes L^p d'une fonction mesurable $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, un point de vue fécond est de considérer la mesure de Lebesgue des ensembles

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\},$$

où λ est un nombre réel positif. Nous avons déjà vu ce point de vue dans la démonstration des injections de Sobolev et nous le reverrons par la suite.

Notation. Nous noterons simplement $\{|f| > \lambda\}$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}$. Aussi, rappelons que nous notons $|A|$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable A .

Définition. La fonction de distribution de f est la fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$F(\lambda) = |\{|f| > \lambda\}|.$$

Nous commençons par deux lemmes classiques qui relient la fonction de distribution F aux normes L^p de f .

Lemme 8.1. Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} F(\lambda) \, d\lambda.$$

Démonstration. Cette formule s'obtient en écrivant que

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} \, d\lambda \, dx,$$

puis en utilisant le théorème de Fubini. □

Lemme 8.2 (Inégalité de Chebyshev). *Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $\lambda > 0$, on a*

$$F(\lambda) \leq \lambda^{-p} \|f\|_{L^p}^p.$$

Démonstration. En effet, on a

$$\|f\|_{L^p}^p = \int |f(x)|^p dx \geq \int_{\{|f|>\lambda\}} \lambda^p dx = \lambda^p F(\lambda),$$

ce qui implique directement le résultat voulu. \square

L'inégalité précédente suggère d'introduire les espaces suivants.

Définition 8.3. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit l'espace de Lebesgue faible $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$\|f\|_{L_w^p} := \sup_{\lambda>0} \left(\lambda |\{|f| > \lambda\}|^{1/p} \right) < +\infty,$$

quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout.

L'inégalité de Chebyshev implique que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L_w^p(\mathbb{R}^n)$ mais la réciproque n'est pas vraie car, par exemple, la fonction $1/|x|$ appartient à l'espace $L_w^1(\mathbb{R})$.

Pour nous, nous n'utiliserons que l'espace de Lebesgue faible $L_w^1(\mathbb{R}^n)$ et le résultat important concernant ces espaces est le théorème d'interpolation suivant.

Théorème 8.4 (Marcinkiewicz). *Soit $q \in]1, +\infty]$. Considérons une application linéaire T définie sur $L^1(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n)$ et à valeurs dans $L_w^1(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n)$ et supposons qu'il existe deux constantes C_1 et C_q telles que*

$$(8.1.1) \quad \begin{aligned} \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), & \quad \|Tf\|_{L_w^1} \leq C_1 \|f\|_{L^1}, \\ \forall f \in L^q(\mathbb{R}^n), & \quad \|Tf\|_{L^q} \leq C_q \|f\|_{L^q}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $p \in]1, q[$, T définit une application bornée de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. Nous verrons dans la démonstration que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n)$ et donc $T(f)$ est bien définie pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Le théorème énonce que $T(f)$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et qu'il existe une constante $C = C(p, n)$ telle que $\|T(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$.

Démonstration. Nous allons montrer ce résultat sous des hypothèses plus faibles (cette version nous servira plus tard). Nous ne supposons pas que T est linéaire mais seulement que T vérifie qui vérifie la propriété de sous-additivité suivante : il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leq A |Tf_1(x)| + A |Tf_2(x)|.$$

Commençons par considérer le cas $q < +\infty$. L'idée de la démonstration est que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n)$. En effet, si on se donne $\gamma > 0$ et que l'on introduit la décomposition

$$f = f^\gamma + f_\gamma \text{ où } f^\gamma(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \gamma, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \gamma, \end{cases} \quad f_\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > \gamma, \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \gamma, \end{cases}$$

on vérifie directement que

$$\|f^\gamma\|_{L^1} \leq \gamma^{1-p} \|f\|_{L^p}^p, \quad \|f_\gamma\|_{L^q}^q \leq \gamma^{q-p} \|f\|_{L^p}^p.$$

Nous allons précisément utiliser cette décomposition en faisant varier le paramètre γ . Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\lambda > 0$, par hypothèse de sous-additivité, on a

$$\{|Tf| > \lambda\} \subset \{|Tf^\lambda| > \lambda/(2A)\} \cup \{|Tf_\lambda| > \lambda/(2A)\}.$$

Par conséquent, les hypothèses (8.1.1) entraînent que

$$|\{|Tf| > \lambda\}| \leq \frac{2AC_1}{\lambda} \|f^\lambda\|_{L^1} + \frac{(2A)^q C_q}{\lambda^q} \|f_\lambda\|_{L^q}^q.$$

En utilisant le lemme 8.1, il suit que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^p}^p &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{|Tf| > \lambda\}| \, d\lambda \\ &= 2AC_1 p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \|f^\lambda\|_{L^1} \, d\lambda + (2A)^q C_q p \int_0^\infty \lambda^{p-1-q} \|f_\lambda\|_{L^q}^q \, d\lambda. \end{aligned}$$

Or, par définition de f^λ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{p-2} \|f^\lambda\|_{L^1} \, d\lambda &= \int_0^\infty \lambda^{p-2} \left(\int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)| \, dx \right) \, d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-2} \, d\lambda \right) \, dx \\ &= \frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de Fubini. En raisonnant de même on obtient que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{p-1-q} \|f_\lambda\|_{L^q}^q \, d\lambda &= \int_0^\infty \lambda^{p-1-q} \left(\int_{\{|f|\leq\lambda\}} |f(x)|^q \, dx \right) \, d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \left(\int_{|f(x)|}^\infty \lambda^{p-1-q} \, d\lambda \right) \, dx = \frac{1}{q-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx. \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration dans le cas $q < +\infty$.

Supposons maintenant que $q = +\infty$. Alors

$$\|Tf_\lambda\|_{L^\infty} \leq C_\infty \|f_\lambda\|_{L^\infty} \leq C_\infty \lambda.$$

Par conséquent on peut écrire que

$$|\{|Tf| > 2AC_\infty\lambda\}| \leq \{|Tf^\lambda| > \lambda\},$$

et on conclut comme précédemment. □

Nous verrons deux exemples d'applications de ce résultat.

8.2 Fonction maximale d'Hardy-Littlewood

Considérons une fonction localement intégrable $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ et un point x de \mathbb{R}^n . Par définition, la fonction maximale d'Hardy-Littlewood est définie par

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy \right\}.$$

Nous verrons que cette fonction intervient naturellement lorsqu'on démontre certaines inégalités ou lorsqu'on cherche à montrer certains résultats de passage à la limite. Notons que dans les applications ou pour les besoins de certaines démonstrations, il est utile de considérer des variantes comme par exemple la fonction maximale *décentrée* définie par

$$(\tilde{M}f)(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \, dy,$$

où le supremum est pris sur toutes les boules contenant x (et pas uniquement celles qui sont centrées en x). On a directement

$$(Mf)(x) \leq (\tilde{M}f)(x).$$

Réciproquement pour toute boule $B(z, \delta)$ contenant x on a $B(z, \delta) \subset B(x, 2\delta)$ donc en utilisant la monotonie de l'intégrale on vérifie que

$$\frac{1}{|B(z, \delta)|} \int_{B(z, \delta)} |f(y)| \, dy \leq \frac{|B(x, 2\delta)|}{|B(z, \delta)|} \frac{1}{|B(x, 2\delta)|} \int_{B(x, 2\delta)} |f(y)| \, dy \leq 2^n (Mf)(x),$$

d'où l'inégalité

$$(\tilde{M}f)(x) \leq 2^n (Mf)(x).$$

On pourrait donc pour ce qui va suivre utiliser indifféremment l'une ou l'autre de ces fonctions maximales. Dans la suite nous ne considérons que la fonction maximale Mf .

Nous allons nous intéresser à la continuité de l'opérateur M sur les espaces de Lebesgue. Pour commencer, notons qu'il n'est même pas évident que Mf soit mesurable (car on prend un supremum sur un ensemble non dénombrable). Néanmoins, on va pouvoir montrer directement un résultat plus fort.

Proposition 8.5. *Pour toute fonction f localement intégrable, la fonction maximale Mf est semi-continue inférieurement et donc mesurable.*

Démonstration. Nous devons montrer que $U_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n; (Mf)(x) > \lambda\}$ est ouvert pour tout $\lambda > 0$. Soit $x \in U_\lambda$. Alors par définition de Mf , il existe $r > 0$ tel que

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| \, dy > \lambda.$$

Par un argument immédiat de continuité, il existe $r' > r$ tel que

$$\frac{1}{|B(x, r')|} \int_{B(x, r)} |f(y)| \, dy > \lambda.$$

Soit $z \in \mathbb{R}^n$ avec $\varepsilon = |z - x|$ petit, de sorte que $B(x, r) \subset B(z, r + \varepsilon) \subset B(x, r')$. Par monotonie de l'intégrale, on en déduit que

$$(Mf)(z) \geq \frac{1}{|B(z, r + \varepsilon)|} \int_{B(z, r + \varepsilon)} |f(y)| \, dy \geq \frac{1}{|B(x, r')|} \int_{B(x, r)} |f(y)| \, dy > \lambda,$$

ce qui prouve que $z \in U_\lambda$ et donc que U_λ est un ensemble ouvert. \square

Le résultat central est le théorème suivant.

Théorème 8.6 (Hardy-Littlewood). *i) Il existe une constante C_1 (dépendant de la dimension n) telle que, pour tout f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\|Mf\|_{L^1_w} \leq C_1 \|f\|_{L^1}.$$

ii) Pour tout $p \in]1, +\infty[$, il existe une constante C_p (dépendant aussi de la dimension n) telle que

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}.$$

Remarque. Attention, la norme L^1 de Mf est finie si et seulement si $f = 0$. En effet, supposons que f est non nulle. Quitte à faire une translation et une dilatation, on peut supposer que l'intégrale de $|f|$ sur $B(0, 1)$ est strictement positive. Alors, pour tout x de norme plus grande que 1, on peut écrire que

$$(Mf)(x) \geq \frac{1}{|B(x, 2|x|)|} \int_{B(x, 2|x|)} |f(y)| \, dy \geq \frac{1}{|B(x, 2|x|)|} \int_{B(0, 1)} |f(y)| \, dy \geq \frac{C}{|x|^n}.$$

Ce qui prouve que Mf ne peut pas appartenir à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Le point délicat consiste à démontrer l'énoncé *i)*. Ensuite on notera que l'énoncé *ii)* est trivial dans le cas $p = +\infty$ (on vérifie directement que $\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$). Le cas $p \in]1, +\infty[$ s'en déduit grâce au théorème de Marcinkiewicz (on fera attention au

fait que l'application $f \mapsto Mf$ n'est pas linéaire mais on pourra appliquer le résultat car dans la démonstration du théorème de Marcinkiewicz nous avons vu que le résultat reste vraie pour les applications sous-additives, ce qui est le cas de M).

Montrons le point i). La démonstration repose sur le lemme de recouvrement suivant.

Lemme 8.7 (Vitali). *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable de mesure finie. Supposons que E est inclus dans la réunion d'une famille $(B_a)_{a \in A}$ de boules ouvertes de \mathbb{R}^n . Alors il existe une famille finie $(B_a)_{a \in J}$ ($J \subset A$) de boules disjointes deux à deux et vérifiant*

$$\left| \bigcup_{a \in J} B_a \right| \geq 2^{-1} 3^{-n} |E|.$$

Démonstration. La théorie de la mesure assure qu'il existe un compact $K \subset E$ dont la mesure $|K|$ est supérieure à la moitié de celle de E . Par compacité, il existe un ensemble fini I_1 et une sous-famille $\{B_a\}_{a \in I_1}$ de boules qui recouvrent K . Choisissons une boule, notée B_1 , de rayon maximal parmi les B_a avec $a \in I_1$. Puis considérons la sous-famille $\{B_a\}_{a \in I_2}$ des boules B_a avec $a \in I_1$ qui n'intersectent pas B_1 . Supposons que cette sous-famille est non vide. Notons B_2 une boule de rayon maximal parmi les boules B_a avec $a \in I_2$. On procède comme cela par récurrence jusqu'à ce que l'algorithme se termine, et cela nous fournit une famille finie B_i , $1 \leq i \leq N$, de boules. Considérons maintenant une boule B quelconque de la première famille $\{B_a\}_{a \in I_1}$. Soit cette boule fait partie de la collection $\{B_i; 1 \leq i \leq N\}$, soit elle n'en fait pas partie et alors on peut considérer le plus petit indice i_0 tel que $B \cap B_{i_0}$ est non vide. Alors par construction le rayon de B_{i_0} est plus grand (au sens large) que celui de B . On en déduit que B est incluse dans la boule notée $3B_{i_0}$ qui est la boule de même centre que B_{i_0} et de rayon égal à 3 fois celui de B_{i_0} . On peut alors écrire que

$$\frac{1}{2} |E| \leq |K| \leq \left| \bigcup_{a \in I_1} B_a \right| \leq \left| \bigcup_{1 \leq i \leq N} 3B_i \right| \leq \sum_{i=1}^N |3B_i| \leq 3^n \sum_{i=1}^N |B_i|.$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Fixons maintenant $\lambda > 0$ et considérons un ensemble mesurable E de mesure finie contenu dans $\{|Mf| > \lambda\}$. Pour tout x appartenant à E , il existe une boule $B_x = B(x, r_x)$ contenant x telle que

$$\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)| dy > \lambda.$$

Considérons la famille $\{B_x\}_{x \in E}$. D'après le lemme précédent, il existe une sous-famille finie $\{B_{x_i}; 1 \leq i \leq N\}$ telle que

$$|E| \leq 2 \cdot 3^n \sum_{i=1}^N |B_{x_i}|.$$

Ceci entraîne

$$|E| \leq 2 \cdot 3^n \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda} \int_{B_{x_i}} |f(y)| \, dy.$$

Comme les boules B_{x_i} sont deux à deux disjointes, on peut majorer le membre de droite par $2 \cdot 3^n \lambda^{-1} \|f\|_{L^1}$. En prenant maintenant le supremum sur tous les ensembles mesurables E de mesure finie inclus dans $\{|Mf| > \lambda\}$, on en déduit que

$$\lambda |\{|Mf| > \lambda\}| \leq 2 \cdot 3^n \|f\|_{L^1},$$

ce qui conclut la démonstration du point i) et donc la démonstration du théorème. \square

8.3 Approximations de l'identité

Considérons une fonction $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et normalisée de sorte que

$$\int \Phi(x) \, dx = 1.$$

On suppose de plus que Φ est :

- radiale : $\Phi(x) = \Phi(y)$ si $|x| = |y|$;
- décroissante : $\Phi(x) \leq \Phi(y)$ si $|x| \geq |y|$.

On introduit

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \Phi\left(\frac{x}{t}\right),$$

et on souhaite étudier l'opérateur $f \mapsto f * \Phi_t$ de convolution par Φ_t . C'est le problème classique d'étude d'une approximation de l'identité. Nous avons déjà rencontré ce problème pour le cas d'une fonction f périodique dans l'étude des séries de Fourier (voir le lemme 5.2). Nous avons alors étudié la convergence de $f * \Phi_t$ vers f dans L^p avec $1 \leq p \leq \infty$ quand t tend vers 0. Ici nous allons changer de point de vue et étudier la question de la convergence simple. Rappelons que si une suite converge dans L^p alors on ne peut pas en déduire que la suite converge simplement (ou peut seulement en déduire qu'une suite *extraite* converge presque partout).

Proposition 8.8. *Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p < +\infty$ et telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.*

Démonstration. On utilise l'exemple classique de la bosse glissante. On construit la suite en plusieurs étapes. A la première étape on définit f_0 comme l'indicatrice de $[0, 1]$. A la deuxième étape, on définit deux fonctions : f_1 est l'indicatrice de $[0, 1/2]$ et f_2 est l'indicatrice de $[1/2, 1]$. On définit ensuite à la n ème étape 2^n fonctions en divisant l'intervalle $[0, 1]$ en 2^n intervalles de taille 2^{-n} et en considérant les 2^n fonctions indicatrices de ces

intervalles. La suite obtenue en ordonnant ces fonctions de façon canonique converge vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout p fini. Mais elle ne converge en aucun point de $[0, 1]$. \square

Le résultat principal de cette partie énonce que l'on a convergence de $f * \Phi_t(x)$ vers $f(x)$ pour presque tout x .

Théorème 8.9. *Soit Φ comme ci-dessus et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $p \in [1, \infty]$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f * \Phi_t(x) = f(x).$$

Démonstration. On va démontrer ce résultat par densité, en commençant par considérer le cas de fonctions continues.

Lemme 8.10. *Si f est continue et bornée sur \mathbb{R}^n alors, pour tout x dans \mathbb{R}^n , on a*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f * \Phi_t(x) = f(x).$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du Lemme 5.2. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. On utilise le fait que

$$(8.3.1) \quad \int \Phi_t(y) dx = \int \Phi(y) dx = 1,$$

pour écrire

$$f * \Phi_t(x) - f(x) = \int \Phi_t(y)(f(x - y) - f(x)) dy.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$ si $|y| \leq \delta$. On écrit le membre de droite de (8.3.1) comme la somme de A_t et B_t avec

$$A_t = \int_{|y| \leq \delta} \Phi_t(y)(f(x - y) - f(x)) dy, \quad B_t = \int_{|y| > \delta} \Phi_t(y)(f(x - y) - f(x)) dy.$$

On a alors directement que A_t est majoré par ε et que B_t peut être majoré par

$$B_t \leq 2 \|f\|_{L^\infty} \int_{|y| > \delta} \Phi_t(y) dy = 2 \|f\|_{L^\infty} \int_{|y| > \delta/t} \Phi(y) dy,$$

et on vérifie que le membre de droite tend vers 0 quand t tend vers 0. Ce qui conclut la démonstration. \square

Lemme 8.11. *Soit Φ comme ci-dessus et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$(8.3.2) \quad \sup_{t > 0} |f * \Phi_t| \leq (Mf)(x).$$

Démonstration. Comme $|f * \Phi_t| \leq |f| * \Phi_t$ et comme la fonction maximale Mf est égale à $M|f|$, on peut supposer sans perte de généralité que $f \geq 0$. Rappelons que, par hypothèse, Φ est une fonction radiale décroissante. Nous allons alors raisonner par approximation et commencer par supposer qu'il existe des rayons ρ_p et des nombres positifs a_p , avec $1 \leq p \leq N$, tels que $\Phi(x) = \sum_{p=1}^N a_p \mathbb{1}_{B(0, \rho_p)}$. Alors

$$f * \Phi_t(x) = \int \frac{1}{t^n} \Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy = \frac{1}{t^n} \sum_p a_p \int_{B(x, t\rho_p)} f(y) dy,$$

d'où, par définition de la fonction maximale,

$$f * \Phi_t(x) \leq \frac{1}{t^n} (Mf)(x) \sum_p a_p |B(x, t\rho_p)| = \|\Phi\|_{L^1} (Mf)(x).$$

Pour une fonction quelconque Φ appartenant à L^1 , radiale et décroissante, on peut trouver une suite de fonctions de la forme précédente qui converge vers Φ . On utilise alors le théorème de convergence monotone pour passer à la limite dans l'inégalité précédente et obtenir le résultat désirée. \square

On est maintenant en mesure de conclure la démonstration. Introduisons

$$\theta(f)(x) = \limsup_{t \rightarrow 0} |f * \Phi_t(x) - f(x)|.$$

On veut montrer que $\theta(f)$ est nulle presque partout. Pour cela on va montrer que la mesure de l'ensemble $\{\theta(f) > \varepsilon\}$ est nulle pour tout $\varepsilon > 0$. Remarquons que le premier lemme implique que $\theta(g) = 0$ pour toute fonction g continue et bornée sur \mathbb{R}^n . On en déduit que $\theta(f) = \theta(f - g)$. D'après l'inégalité triangulaire et le second lemme, on a

$$\theta(f - g) \leq |f - g| + M(f - g).$$

Alors

$$|\{\theta(f - g) > \varepsilon\}| \leq |\{|f - g| > \varepsilon/2\}| + |\{M(f - g) > \varepsilon/2\}|.$$

Supposons que $p = 1$. Alors l'inégalité de Chebyshev implique que

$$|\{|f - g| > \varepsilon/2\}| \leq \frac{2}{\varepsilon} \|f - g\|_{L^1}$$

et le théorème d'Hardy-Littlewood sur la fonction maximale implique que

$$|\{M(f - g) > \varepsilon/2\}| \leq \frac{2C_1}{\varepsilon} \|f - g\|_{L^1}.$$

On a donc, pour toute fonction g intégrable, continue et bornée,

$$|\{\theta(f) > \varepsilon\}| = |\{\theta(f - g) > \varepsilon\}| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|f - g\|_{L^1}.$$

Par densité des fonctions continues et bornées dans L^1 , ceci implique que $|\{\theta(f) > \varepsilon\}| = 0$. Si $1 < p < \infty$, on procède de même en utilisant que

$$|\{|f - g| > \varepsilon/2\}| \leq \frac{2^p}{\varepsilon^p} \|f - g\|_{L^p}^p,$$

et

$$|\{M(f - g) > \varepsilon/2\}| \leq \frac{2^p}{\varepsilon^p} \|M(f - g)\|_{L^p}^p \leq C_p^p \frac{2^p}{\varepsilon^p} \|f - g\|_{L^p}^p.$$

Enfin, pour $p = \infty$, on se ramène au cas précédent en multipliant f par la fonction indicatrice de $B(0, n)$. On montre alors que l'ensemble $\{x \in B(0, n/2); \theta(f)(x) > 0\}$ est de mesure nulle pour tout n , ce qui implique le résultat désiré. \square

Le théorème précédent admet un corollaire très connu qui énonce que les moyennes locales de f sur des boules centrées en x convergent pour presque tout x vers $f(x)$.

Corollaire 8.12 (Théorème de différentiation de Lebesgue). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, t)|} \int_{B(x, t)} f(y) \, dy.$$

Démonstration. Pour

$$\Phi = \frac{1}{|B(0, 1)|} \mathbb{1}_{B(0, 1)},$$

on a

$$f * \Phi_t(x) = \frac{1}{|B(x, t)|} \int_{B(x, t)} f(y) \, dy.$$

Le théorème de différentiation de Lebesgue est donc une conséquence du théorème précédent. \square

De même en appliquant ce qui précède avec Φ donnée par la fonction Gaussienne, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 8.13. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et soit t un nombre réel strictement positif. On définit la fonction u_t par*

$$(8.3.3) \quad u_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right) f(y) \, dx.$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u_t(x) = f(x),$$

pour presque tout x dans \mathbb{R}^n .

Remarque. *i)* En Fourier on a

$$(8.3.4) \quad u_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi.$$

Nous avons déjà étudié la question de la convergence de u_t vers f dans la démonstration du théorème d'inversion de Fourier. Nous avons montré que u_t converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ quand t tend vers 0. Cependant, comme nous l'avons rappelé, ceci n'implique pas la convergence presque partout.

ii) La fonction $u(t, x) = u_t(x)$ définie par (8.3.3) est (formellement) solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$

Ce résultat donne un sens au fait que u est la solution de donnée initiale $u|_{t=0} = f$.

8.4 Inégalité d'Hardy-Littlewood-Sobolev

On appelle potentiels de Riesz les opérateurs I_α définis pour $\alpha > 0$ par

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy.$$

Théorème 8.14. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons trois nombres réels (p, q, α) strictement positifs tels que*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}, \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha}.$$

Alors il existe une constante $C = C(p, q, n, \alpha)$ telle que

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

Démonstration. On peut supposer que $\|f\|_{L^p} = 1$. Introduisons un paramètre $R > 0$ que l'on fixera ultérieurement. On découpe l'intégrale en $I_\alpha(f)(x) = I_{\alpha,R}(f)(x) + I_\alpha^R(f)(x)$ avec

$$I_{\alpha,R}(f)(x) = \int_{B(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy, \quad I_\alpha^R(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy.$$

On peut écrire $I_{\alpha,R}(f)(x)$ comme le produit de convolution de f et de la fonction

$$\Psi(x) = \mathbb{1}_{B(0,R)} |x|^{\alpha-n}.$$

Notons $\gamma(R)$ la norme L^1 de Ψ et posons $\Phi = \Psi/\gamma(R)$. Alors on peut appliquer l'inégalité (8.3.2) avec $t = 1$, pour en déduire que

$$|I_{\alpha,R}(f)(x)| \leq \gamma(R)M(f)(x).$$

On calcule que $\gamma(R) = \frac{|S^{n-1}|}{\alpha} R^\alpha$ (calcul en coordonnées polaires).

Pour estimer $I_\alpha^R(f)(x)$ on procède autrement. On utilise directement l'inégalité de Hölder pour écrire

$$|I_\alpha^R(f)(x)| \leq C \|f\|_{L^p} \left(\int_R^{+\infty} r^{(\alpha-n)p'+n-1} dr \right)^{1/p'} \leq C \|f\|_{L^p} R^{\alpha-n/p},$$

où l'on a utilisé l'hypothèse $p < \alpha/n$. En rappelant que $\|f\|_{L^p} = 1$ et en combinant ce qui précède, on arrive à

$$|I_\alpha(f)(x)| \leq CR^\alpha M(f)(x) + CR^{\alpha-n/p}.$$

On choisit alors R de sorte que $R^\alpha M(f)(x) = R^{\alpha-n/p}$, ce qui nous amène à la conclusion

$$|I_\alpha(f)(x)| \leq C(M(f)(x))^{1-\alpha p/n}.$$

Puis, par définition de q , on en déduit que

$$|I_\alpha(f)(x)|^q \leq C(M(f)(x))^p.$$

Comme $p > 1$ par hypothèse, on peut appliquer le théorème d'Hardy-Littlewood et l'hypothèse $\|f\|_{L^p} = 1$ pour déduire que

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^q}^q \leq C' \|f\|_{L^p}^p = C'.$$

Ceci démontre le résultat voulu. □

8.5 Injections de Sobolev

Nous allons utiliser l'inégalité d'Hardy-Littlewood-Sobolev pour étendre les injections de Sobolev que nous avons vues au chapitre précédent. Le théorème 6.24 énonce que, pour tout nombre réel s dans $]0, n/2[$, on a

$$\|f\|_{L^{\frac{2n}{n-2s}}} \leq C_s \|f\|_{H^s}.$$

En fait, nous avons montré un résultat plus fort (cf (6.3.2)) :

$$\|f\|_{L^{\frac{2n}{n-2s}}} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, pour $s = 1$, ceci implique que

$$q = \frac{2n}{n-2} \quad \Rightarrow \quad \|f\|_{L^q} \leq C \|\nabla f\|_{L^2}.$$

Dans ces notes de cours, nous avons fait le choix de nous concentrer sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, construits sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mais il existe des espaces de Sobolev construits sur $L^p(\mathbb{R}^n)$. On a en particulier la définition suivante, analogue à la définition 6.1.

Définition 8.15. Une fonction $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si, pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe $v_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\int_{\Omega} v\phi \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On dit que v_j est la dérivée au sens faible de u dans la direction x_j , et on note plutôt $\partial_j u$ cette fonction. Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{1 \leq j \leq n} \|\partial_j u\|_{L^p}.$$

Théorème 8.16 (Injections de Sobolev pour $W^{1,p}$). Soit $n \geq 2$ et soit $p \in]1, n[$. Définissons p^* par

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Alors il existe une constante C telle que, pour toute fonction $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration. On admet que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de sorte qu'il suffit de supposer que f appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Rappelons (cf (7.2.3)) que

$$f(x) = - \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x-y) \cdot \nabla f(y)}{|x-y|^n} \, dy.$$

Donc

$$|f| \leq \frac{1}{|S^{n-1}|} I_1(|\nabla f|),$$

et l'injection de Sobolev est une conséquence de l'inégalité d'Hardy-Littlewood-Sobolev. \square

Troisième partie

Analyse microlocale

Chapitre 9

Opérateurs pseudo-différentiels

9.1 Opérateurs pseudo-différentiels

Considérons un opérateur différentiel

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \partial_x^\alpha$$

où les coefficients p_α appartiennent à l'espace $C_b^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ des fonctions C^∞ , bornées ainsi que toutes leurs dérivées. La fonction

$$p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$$

est appelée le symbole de P . Alors

$$Pe^{ix \cdot \xi} = p(x, \xi) e^{ix \cdot \xi},$$

et pour u dans la classe de Schwartz on peut écrire Pu sous la forme

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Un opérateur pseudo-différentiel est opérateur de la forme précédente, mais où la fonction $p(x, \xi)$ n'est pas nécessairement une fonction polynomiale. Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier la définition et la continuité de ces opérateurs.

9.1.1 Symboles

Définition. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [0, 1]$. La classe des symboles d'ordre m , notée $S_{\rho, 0}^m(\mathbb{R}^n)$, est l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ à valeurs complexes telles que, pour tous multi-indices α et β dans \mathbb{N}^n , il existe une constante $C_{\alpha\beta}$ telle que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta|}.$$

Notation. On ne va s'intéresser dans ce cours qu'à deux sous-classes particulières : la classe $S_{1,0}^m$ et la classe $S_{0,0}^0$. Nous noterons simplement

$$S^m(\mathbb{R}^n) = S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n)$$

et

$$C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}) = S_{0,0}^0(\mathbb{R}^n).$$

L'indice 0 dans $S_{\rho,0}^m(\mathbb{R}^n)$ est superflu bien sûr ; on l'a maintenu dans cette définition par soucis de cohérence avec les notations utilisées dans la littérature.

Notation. Dans toute la suite on utilisera la notation

$$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On introduit aussi

$$S^{-\infty} := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m \quad \text{et} \quad S^{+\infty} = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m.$$

Définition (Symboles elliptiques). *Soit $m \in \mathbb{R}$. Un symbole $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ est elliptique s'il existe deux constantes R et C strictement positives telles que,*

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad |\xi| \geq R \Rightarrow |a(x, \xi)| \geq C \langle \xi \rangle^m.$$

Les règles élémentaires du calcul différentiel impliquent la proposition suivante.

Proposition. *Si $a \in S^m$, $b \in S^{m'}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ alors*

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|}, \quad ab \in S^{m+m'}.$$

Notation. On note $C_b^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur Ω qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées.

On a bien sûr $S^0(\mathbb{R}^n) \subset C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Exemples

- 1) Si p est une fonction de x uniquement et $p \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $p \in S^0(\mathbb{R}^n)$.
- 2) Si $p = p(x, \xi)$ appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ (support compact en x et ξ) alors $p \in S^{-\infty}$.
- 3) Supposons que $p(x, \xi)$ soit un polynôme en ξ d'ordre $m \in \mathbb{N}$ dont les coefficients sont des fonctions $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \xi^\alpha \quad (p_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

Alors $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$.

- 4) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, le symbole $\langle \xi \rangle^m$ appartient à $S^m(\mathbb{R}^n)$. En effet, la fonction $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (\tau, \xi) \mapsto (\tau^2 + |\xi|^2)^{m/2}$ est positivement homogène d'ordre m sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et donc $\partial_{\xi}^{\alpha}((\tau^2 + |\xi|^2)^{m/2})$ est homogène d'ordre $m - |\alpha|$, bornée par $C_{\alpha}(\tau^2 + |\xi|^2)^{(m-|\alpha|)/2}$. Comme la dérivation en ξ et la restriction à $\tau = 1$ commutent, on en déduit le résultat.
- 5) Le symbole $|\xi|$ n'est pas dans $S^1(\mathbb{R}^n)$ car il n'est pas régulier en 0.
- 6) Soit $a = a(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ une fonction homogène de degré m , vérifiant

$$a(\lambda\xi) = \lambda^m a(\xi) \quad \forall \lambda > 0.$$

Pour toute fonction $\chi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}_{\xi}^n)$ nulle au voisinage de 0, on a $\chi(\xi)a(\xi) \in S^m$.

- 7) Soit $a = a(x, \xi)$ un symbole elliptique d'ordre m . Alors il existe $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\frac{1 - \chi(\xi)}{a(x, \xi)} \in S^{-m}.$$

- 8) Soit $f = f(x)$ dans $C_b^{\infty}(\mathbb{R})$. Le symbole $p(x, \xi) = f(x) \sin(\xi)$ appartient à $C_b^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ mais pas à $S^0(\mathbb{R}^n)$ car la dérivée en ξ d'ordre α ne décroît pas comme $(1 + |\xi|)^{-\alpha}$.

9.1.2 Définition d'un opérateur pseudo-différentiel

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [0, 1]$. Pour tout $a \in S_{\rho, 0}^m(\mathbb{R}^n)$, toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans la classe de Schwartz et tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\xi \mapsto a(x, \xi)\widehat{u}(\xi)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}_{\xi}^n)$. A fortiori elle est intégrable et on peut définir

$$\text{Op}(a)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi)\widehat{u}(\xi) d\xi.$$

On dit que $\text{Op}(a)$ est un opérateur pseudo-différentiel et on appelle a son symbole.

Théorème 9.1. *Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [0, 1]$. Si $a \in S_{\rho, 0}^m(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la formule précédente définit une fonction $\text{Op}(a)u$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus $\text{Op}(a)$ est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Notons que $a(x, \xi)$ est une fonction C^{∞} sur \mathbb{R}^{2n} qui est bornée ainsi que toutes ses dérivées par des puissances de $\langle \xi \rangle$. Par ailleurs, $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc on peut appliquer les formules du calcul intégral de Lebesgue et on vérifie facilement que $\text{Op}(a)u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Nous nous contenterons de démontrer des estimations.

En utilisant $\|\langle \xi \rangle^{-m} a\|_{L^{\infty}} < +\infty$ et $\|\langle \xi \rangle^{m+2n} \widehat{u}\|_{L^{\infty}} < +\infty$, nous obtenons l'inégalité

$$|\text{Op}(a)u(x)| \leq (2\pi)^{-n} \int \|\langle \xi \rangle^{-m} a\|_{L^{\infty}} \|\langle \xi \rangle^{m+2n} \widehat{u}\|_{L^{\infty}} \langle \xi \rangle^{-2n} d\xi,$$

donne $\text{Op}(a)u$ bornée avec

$$\|\text{Op}(a)u\|_{L^\infty} \leq C\mathcal{N}_{m+2n}(\widehat{u})$$

où l'on a noté $\mathcal{N}_p(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty}$ les semi-normes canoniques sur l'espace de Schwartz ; rappelons que la transformée de Fourier est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\mathcal{N}_{m+2n}(\widehat{u}) \leq C_{m+2n} \mathcal{N}_{m+3n+1}(u).$$

Pour estimer les autres semi-normes dans \mathcal{S} de $\text{Op}(a)u$ il faut maintenant regarder les dérivées et les multipliés par les monômes de $\text{Op}(a)u$. Pour cela on se ramène au cas déjà étudié à l'aide des formules (à vérifier en guise d'exercice)

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} \text{Op}(a)u &= \text{Op}(a)(\partial_{x_j} u) + \text{Op}(\partial_{x_j} a)u, \\ x_j \text{Op}(a)u &= \text{Op}(a)(x_j u) + i \text{Op}(\partial_{\xi_j} a)u. \end{aligned}$$

Ainsi, $x^\alpha \partial_x^\beta \text{Op}(a)u$ peut se récrire comme une combinaison linéaire de termes

$$\text{Op}(\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta a)(x^{\alpha-\delta} \partial_x^{\beta-\gamma} u).$$

On s'est ramené au cas précédent. Ce qui montre que $\text{Op}(a)u$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que l'on a des estimations des semi-normes de $\text{Op}(a)u$ en fonction d'une somme de semi-normes de u . \square

9.2 Continuité des opérateurs pseudo-différentiels

Théorème 9.2. *Si $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, l'opérateur $\text{Op}(a)$ se prolonge de manière unique en un opérateur continu $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Nous allons démontrer ce résultat en supposant, pour simplifier les notations, que la dimension d'espace n est inférieure ou égale à 3 (sinon il suffit de remplacer le polynôme $P(\zeta)$ ci-dessous par $(1 + |\zeta|^2)^k$ où k est un entier tel que $4k > n$).

Introduisons le polynôme

$$P(\zeta) = 1 + |\zeta|^2 \quad (\zeta \in \mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3).$$

Lemme 9.3. *Etant donnée une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on introduit la fonction*

$$Wu(x, \xi) = \int e^{-iy \cdot \xi} P(x - y)^{-1} u(y) dy \quad ((x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}).$$

i) Alors Wu est une fonction $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et de plus pour tout multi-indices α, β, γ ,

$$\sup_{\mathbb{R}^{2n}} P(x)|\xi|^\gamma \left| (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta Wu)(x, \xi) \right| < +\infty.$$

ii) Il existe une constante A telle que

$$(9.2.1) \quad \|Wu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = A \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

iii) Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$, il existe A_γ telle que

$$\|\partial_x^\gamma Wu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq A_\gamma \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration. i) On calcule que

$$\xi^\gamma (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta Wu)(x, \xi) = \int i^{|\gamma|} \partial_y^\gamma (e^{-iy \cdot \xi}) (-iy)^\beta \partial_x^\alpha (P(x-y)^{-1}) u(y) dy$$

et on intègre par parties

$$\begin{aligned} & \xi^\gamma (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta Wu)(x, \xi) \\ &= \sum_{\gamma' + \gamma'' = \gamma} \frac{\gamma!}{\gamma'! \gamma''!} \int (-i)^{|\gamma|} \partial_y^{\gamma'} (u(y) (-iy)^\beta) (-1)^{|\gamma''|} (\partial^{\gamma'' + \alpha} 1/P)(x-y) e^{-iy \cdot \xi} dy. \end{aligned}$$

Le fait (déjà vu) que $\langle \xi \rangle^{-2}$ soit un symbole d'ordre -2 entraîne que

$$|\partial_\xi^\alpha \langle \xi \rangle^{-2}| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-2-|\alpha|} \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-2}$$

d'où l'on déduit que

$$|\partial^\alpha (1/P)(x-y)| \leq C_\alpha (1 + |x-y|^2)^{-1} \leq 2C_\alpha (1 + |x|^2)^{-1} (1 + |y|^2),$$

où la dernière inégalité provient du fait que

$$1 + |x|^2 = 1 + |x-y+y|^2 \leq 1 + 2|x-y|^2 + 2|y|^2 \leq 2(1 + |x-y|^2)(1 + |y|^2).$$

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Wu(x, \cdot)$ est la transformée de Fourier de $y \mapsto u(y)P(x-y)^{-1}$.

Donc

$$\int |W(x, \xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int |u(y)P(x-y)^{-1}|^2 dy$$

d'après la formule de Plancherel. Alors

$$\iint |W(x, \xi)|^2 d\xi dx = (2\pi)^n \iint |u(y)P(x-y)^{-1}|^2 dy dx = A^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

iii) En combinant les observations précédentes. □

Lemme 9.4. On définit pour $x \in \mathbb{R}^n$, $(y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{y,\eta}(x) = e^{i(x-y)\cdot\eta} P(x-y)^{-1},$$

et

$$\widetilde{W}u(y, \eta) = \langle u, \varphi_{y,\eta} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = e^{iy\cdot\eta} W u(y, \eta).$$

On a la formule de reconstruction

$$u(x) = \frac{1}{A} \iint \widetilde{W}u(y, \eta) \varphi_{x,\eta}(y) dy d\eta,$$

où A est la constante définie par (9.2.1).

Démonstration. D'après (9.2.1), $\mathcal{W} := \widetilde{W}/\sqrt{A}$ est une isométrie donc

$$\mathcal{W}^* \mathcal{W} = I,$$

et on en déduit le résultat voulu. □

Lemme 9.5. On a

$$\widehat{u}(\xi) = e^{-ix\cdot\xi} (I - \Delta_\xi) (e^{ix\cdot\xi} W u(x, \xi))$$

et

$$\bar{v}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-ix\cdot\xi} (I - \Delta_x) (e^{ix\cdot\xi} W \bar{v}(\xi, x)).$$

Démonstration. Comme $(I - \Delta_\xi) e^{iX\cdot\xi} = P(X)$ on a

$$e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} u(y) dy = (I - \Delta_\xi) \int e^{i(x-y)\cdot\xi} P(x-y)^{-1} u(y) dy.$$

De façon duale, en utilisant la transformée de Fourier inverse, nous avons

$$e^{ix\cdot\xi} \bar{v}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(\xi-\eta)\cdot x} \bar{v}(\eta) d\eta = \frac{1}{(2\pi)^n} (I - \Delta_x) \int e^{i(\xi-\eta)\cdot x} P(\xi-\eta)^{-1} \bar{v}(\eta) d\eta.$$

□

Démonstration du Théorème 9.2. Compte tenu de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, il suffit de démontrer l'inégalité

$$\|\text{Op}(a)u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2}$$

pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Considérons deux fonctions u, v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et posons

$$I := \iint e^{ix\cdot\xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \bar{v}(x) d\xi dx.$$

On veut montrer que $|I| \leq C \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$. Pour cela nous allons réécrire I comme un produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ de fonctions faisant intervenir Wu et $W\widehat{v}$.

Commençons par écrire I sous la forme

$$I = \iint a(x, \xi) \left[(I - \Delta_\xi)(e^{ix \cdot \xi} Wu(x, \xi)) \right] \bar{v}(x) \, d\xi \, dx.$$

Comme $(I - \Delta_\xi)(e^{ix \cdot \xi} Wu(x, \xi) \bar{v}(x))$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, on peut intégrer par parties en ξ et déduire que

$$I = \iint \left[(I - \Delta_\xi)a(x, \xi) \right] Wu(x, \xi) e^{ix \cdot \xi} \bar{v}(x) \, d\xi \, dx.$$

En utilisant l'identité pour v il vient

$$I = \iint \left[(I - \Delta_\xi)a(x, \xi) \right] Wu(x, \xi) (I - \Delta_x)(e^{ix \cdot \xi} W\widehat{v}(\xi, x)) \, d\xi \, dx$$

et en intégrant par parties en x ,

$$I = \iint (I - \Delta_x) \left[((I - \Delta_\xi)a(x, \xi)) Wu(x, \xi) \right] e^{ix \cdot \xi} W\widehat{v}(\xi, x) \, d\xi \, dx$$

donc

$$I = \sum_{|\beta| \leq 2, |\alpha| + |\gamma| \leq 2} C_{\alpha\beta\gamma} \iint (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)) \partial_x^\gamma Wu(x, \xi) W\widehat{v}(\xi, x) e^{ix \cdot \xi} \, dx \, d\xi.$$

On conclut la démonstration avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les résultats précédents :

$$\|\partial_x^\gamma Wu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \lesssim \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \|W\widehat{v}(\xi, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = A \|\widehat{v}\|_{L^2} = A(2\pi)^{\frac{n}{2}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

où l'on a utilisé la formule de Plancherel dans la dernière inégalité. \square

9.3 Opérateurs semi-classiques

Les opérateurs semi-classiques jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines de l'analyse ainsi qu'en physique mathématique. Ce sont des opérateurs qui dépendent d'un petit paramètre $h \in]0, 1]$, qui est relié à la constante de Planck \hbar en mécanique quantique.

Etant donné un symbole $a = a(x, \xi)$ et $h \in]0, 1]$ on définit

$$\text{Op}_h(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, h\xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Nous allons déduire du théorème de continuité précédent que

$$\|\text{Op}_h(a)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \sup_{\mathbb{R}^{2n}} |a| + O(h^{\frac{1}{2}}).$$

Théorème 9.6. *Il existe une constante C et un entier M tels que pour tout $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et tout $h \in]0, 1]$,*

$$\|\text{Op}_h(a)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} |a(x, \xi)| + C \sup_{1 \leq |\alpha| + |\beta| \leq M} \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} h^{\frac{1}{2}(|\alpha| + |\beta|)} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \right|.$$

Démonstration. On utilise des changements de variables élémentaire pour écrire

$$\begin{aligned} \text{Op}_h(a)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, h\xi) u(y) \, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint e^{\frac{i}{h}(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) u(y) \, dy \, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x' - y') \cdot \xi'} a(h^{\frac{1}{2}}x', h^{\frac{1}{2}}\xi') u(h^{\frac{1}{2}}y') \, dy' \, d\xi'. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\text{Op}_h(a)u(x) = (\text{Op}(a_h)u_h)(h^{-\frac{1}{2}}x)$$

où

$$a_h(x, \xi) = a(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}\xi), \quad u_h(y) = u(h^{\frac{1}{2}}y).$$

Le théorème 9.2 implique que

$$\|\text{Op}_h(a)u\|_{L^2} = h^{\frac{n}{4}} \|\text{Op}(a_h)u_h\|_{L^2} \leq Ch^{\frac{n}{4}} N(a_h) \|u_h\|_{L^2},$$

où

$$N(a_h) = \sup_{|\alpha| + |\beta| \leq M} \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_h|$$

pour un certain M assez grand. On conclut la démonstration en notant que $h^{\frac{n}{4}} \|u_h\|_{L^2}$ est égal à $\|u\|_{L^2}$. \square

Chapitre 10

Calcul symbolique

10.1 Introduction à l'analyse microlocale

Nous nous proposons dans ce chapitre de donner une introduction à l'analyse microlocale qui est, en gros, l'étude des singularités des fonctions de plusieurs variables réelles. Les objets de base de l'analyse microlocale sont les opérateurs pseudo-différentiels et le front d'onde.

Le concept de front d'onde a été introduit en 1969-1970 par Sato pour le front d'onde analytique, et par Hörmander pour le front d'onde C^∞ , celui dont nous allons parler. Le front d'onde d'une distribution f , noté $\text{WF}(f)$, est un sous-ensemble de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, qui décrit non seulement les points où f est singulière, mais encore les co-directions dans lesquelles celle-ci est singulière. Cet ensemble est défini par son complémentaire.

Définition 10.1. *i) On dit que f est microlocalement de classe C^∞ en un point (x_0, ξ_0) de $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ s'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ non nulle en x_0 et un cône ouvert Γ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contenant ξ_0 tels que la transformée de Fourier $\widehat{\varphi f}$ soit à décroissance rapide dans les directions voisines de ξ_0 ,*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0 : \forall \xi \in \Gamma, \quad |\widehat{\varphi f}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}.$$

ii) L'ensemble des points (x_0, ξ_0) où f n'est pas microlocalement C^∞ est appelé le front d'onde de f et noté $\text{WF}(f)$.

Le front d'onde est un sous-ensemble conique de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, ce qui signifie que pour tout $t > 0$,

$$(x, \xi) \in \text{WF}(f) \iff (x, t\xi) \in \text{WF}(f).$$

Si P est un opérateur différentiel d'ordre m dont les coefficients p_α sont réels et C^∞ ,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \partial_x^\alpha.$$

Une question importante en EDP est de déterminer le front d'onde des solutions distributions de l'équation $Pf = 0$. Les résultats de base relient la géométrie de l'opérateur à la géométrie des singularités de ses solutions. Les deux objets géométriques les plus simples que l'on associe à l'EDP $P(f) = 0$ sont les suivants.

i) Le **symbole principal**

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

qui est un polynôme homogène de degré m en ξ .

ii) La **variété caractéristique** de P que l'on note $\text{Car}(P)$ et qui est le fermé (homogène en ξ) défini par

$$\text{Car}(P) = \{ (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) ; p_m(x, \xi) = 0 \}.$$

Nous allons introduire les deux résultats principaux que nous démontrerons plus tard.

Le premier résultat important de la théorie est le suivant.

Théorème 10.2. *Les singularités sont contenues dans la variété caractéristique :*

$$(10.1.1) \quad P(f) = 0 \implies \text{WF}(f) \subset \text{Car}(P).$$

Le théorème de propagation des singularités dit que non seulement le front d'onde (les singularités) de la fonction est contenu dans la variété caractéristique, mais en plus c'est forcément une réunion de trajectoires pour un système dynamique naturel.

Introduisons le champ de vecteurs sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ dont les composantes sont

$$(\partial p_m / \partial \xi_j ; -\partial p_m / \partial x_j) \quad 1 \leq j \leq n,$$

appelé champ hamiltonien de p_m et noté H_{p_m} . Ses courbes intégrales sont appelées les bicaractéristiques de l'équation. Ce sont les fonctions $t \mapsto (x(t), \xi(t))$ solutions de

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, \xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial p_m}{\partial x}(x, \xi).$$

Théorème 10.3. *Pour toute solution de $P(f) = 0$, le front d'onde de f , $\text{WF}(f) \subset \text{Car}(P)$ est une union de bicaractéristiques de P . Si $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}(P)$ et si γ_0 est la courbe intégrale du champ H_{p_m} passant par (x_0, ξ_0) , alors $(x_0, \xi_0) \in \text{WF}(f) \implies \gamma_0 \subset \text{WF}(f)$.*

Nous concluons cette introduction en recopions ici un argument de G. Lebeau pour expliquer que le théorème de propagation des singularités se doit d'exister. L'argument est qu'une equation doit réduire le nombre de variables indépendantes. Par conséquent, si f est solution de $P(f) = 0$ alors f ne dépend que de $n - 1$ variables. Quand on microlocalise, on double le nombre de variables pour passer de $2n$ à $2n - 2$ variables. Quand on dit que le front d'onde est contenu dans la variété caractéristique, on passe de $2n$ à $2n - 1$. Pour passer de $2n - 1$ à $2n - 2$ c'est le théorème de propagation des singularités.

10.2 Introduction au calcul symbolique

Rappelons que l'on dit qu'une fonction $a = a(x, \xi)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs complexes appartient à la classe $S^m(\mathbb{R}^n)$, pour un certain nombre réel m , si

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n).$$

Etant donné $m \in \mathbb{R}$, un symbole $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ et une fonction u dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous avons vu que l'on peut définir $\text{Op}(a)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\text{Op}(a)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi,$$

et $\text{Op}(a)$ s'étend de manière unique en un opérateur borné de L^2 dans L^2 si $a \in S^0(\mathbb{R}^n)$.

Considérons deux opérateurs pseudo-différentiels $A = \text{Op}(a)$ et $B = \text{Op}(b)$ de symboles $a, b \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Alors $\lambda A + \mu B$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $\lambda a + \mu b \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Les questions qui vont nous intéresser dans ce chapitre concernent les opérateurs $A \circ B$ et A^* . Nous allons voir que ceux sont aussi des opérateurs pseudo-différentiels et que l'on peut calculer leurs symboles. Le **calcul symbolique** est justement le procédé qui permet de **manipuler** des opérateurs en travaillant **au niveau des symboles**.

Nous allons voir trois situations bien distinctes dans lesquelles on peut facilement étudier la composition et le passage à l'adjoint pour les opérateurs pseudo-différentiels.

Ces situations correspondent aux cas suivants :

- A. Les **multiplicateurs de Fourier** (de symboles ne dépendant pas de x).
- B. Les **opérateurs différentiels** (le symbole est un polynôme en ξ).
- C. Les **opérateurs de microlocalisation** (de symboles à support compact dans \mathbb{R}^{2n}).

A. Multiplicateurs de Fourier

Soit $A = \text{Op}(a)$ avec $a = a(\xi)$ indépendant de x . Alors A est un cas particulier de multiplicateur de Fourier. Rappelons qu'un multiplicateur de Fourier est un opérateur

linéaire qui agit sur L^2 ou \mathcal{S}' en multipliant la transformée de Fourier d'une fonction (ou d'une distribution tempérée) par une fonction donnée, appelée le symbole. Etant donnée une fonction $m = m(\xi)$ à valeurs complexes, le multiplicateur de Fourier de symbole m est l'opérateur, noté $m(D_x)$, défini par

$$\widehat{m(D_x)f}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Si $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $m(D_x)$ est bien défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $m(D_x) \in \mathcal{L}(L^2)$. Si $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à croissance lente (il existe N tel que pour tout α on a $|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^N$) alors $m(D_x)$ est continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On vérifie directement que

$$\begin{aligned} m_1(D_x)m_2(D_x) &= m(D_x) \quad \text{avec } m(\xi) = m_1(\xi)m_2(\xi), \\ m(D_x)^* &= m^*(D_x) \quad \text{avec } m^*(\xi) = \overline{m(\xi)}. \end{aligned}$$

Exemples de multiplicateur de Fourier :

- ∂_{x_j} est le multiplicateur de Fourier de symbole $i\xi_j$.
- Le laplacien Δ est le multiplicateur de Fourier de symbole $-|\xi|^2$.
- La transformée de Hilbert est le multiplicateur de Fourier de symbole $\xi/|\xi|$ ($\xi \in \mathbb{R}$).
- La racine carrée de $-\Delta$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$.
- Soit $s \in \mathbb{R}$. L'opérateur qui réalise l'isomorphisme canonique de H^s sur L^2 est le multiplicateur de Fourier de symbole $\langle \xi \rangle^s$ où $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$.
- Considérons l'équation

$$\partial_t u + i\langle D_x \rangle^s u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Cette équation peut se résoudre par le théorème de Hille-Yosida ou par la transformée de Fourier. L'opérateur qui envoie la donnée initiale u_0 sur la solution au temps t est le multiplicateur de Fourier de symbole $\exp(-it\langle \xi \rangle^s)$.

B. Opérateurs différentiels

Considérons deux opérateurs différentiels

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha, \quad B = \sum_{|\alpha| \leq m'} b_\alpha(x) \partial_x^\alpha$$

où les coefficients a_α, b_α appartiennent à $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Introduisons leurs symboles

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha, \quad b(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m'} b_\alpha(x) (i\xi)^\alpha,$$

de sorte que $A = \text{Op}(a)$ et $B = \text{Op}(b)$. Notons e_ξ la fonction exponentielle $x \mapsto e^{ix \cdot \xi}$. Alors

$$(Ae_\xi)(x) = a(x, \xi)e_\xi(x), \quad (Be_\xi)(x) = b(x, \xi)e_\xi(x).$$

De plus, pour toute fonction régulière $b(x, \xi)$,

$$\begin{aligned} A(be_\xi)(x) &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \partial_x^{\alpha} (e^{ix \cdot \xi} b(x, \xi)) \\ &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) ((i\xi + \partial_x)^{\alpha} b(x, \xi)) e^{ix \cdot \xi} \\ &= e^{ix \cdot \xi} a \left(x, \xi + \frac{1}{i} \partial_x \right) b(x, \xi) \\ &= e^{ix \cdot \xi} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{i^{|\beta|} \beta!} (\partial_{\xi}^{\beta} a(x, \xi)) (\partial_x^{\beta} b(x, \xi)) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule de Taylor pour un polynôme. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 10.4. *Si A et B sont des opérateurs différentiels, alors $A \circ B$ est un opérateur différentiel de symbole*

$$a \# b(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} (\partial_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi)) (\partial_x^{\alpha} b(x, \xi)).$$

Noter que la somme est finie puisque $\partial_{\xi}^{\alpha} a = 0$ si $|\alpha| > m$.

Démonstration. L'opérateur $A \circ B$ est bien sûr un opérateur différentiel et on a vu que $(A \circ B)e_{\xi} = (a \# b)e_{\xi}$. \square

Exercice. Soit A est un opérateur différentiel. Montrer que A^* est un opérateur différentiel de symbole

$$a^*(x, \xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\alpha} \bar{a}(x, \xi).$$

C. Opérateurs de microlocalisation

Les opérateurs de localisation, de la forme $u \mapsto \varphi u$ où $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, sont essentiels en Analyse. De même que les opérateurs de localisation en fréquence, qui sont des multiplicateurs de Fourier $u \mapsto \varphi(D_x)u$ avec $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Les opérateurs pseudo-différentiels permettent une localisation simultanée en x et en ξ , en considérant un opérateur $\text{Op}(a)$ avec $a \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$. Si $a \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ on dit que $\text{Op}(a)$ est un opérateur de microlocalisation.

Nous allons voir que l'adjoint d'un opérateur de microlocalisation est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole n'appartient pas nécessairement à $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ mais appartient à tous les espaces $S^m(\mathbb{R}^n)$ pour $m \leq 0$.

Proposition 10.5. Soit $a = a(x, \xi)$ un symbole appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Alors

$$a^*(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-iy \cdot \eta} \overline{a(x - y, \xi - \eta)} dy d\eta$$

défini un symbole a^* appartenant à $S^{-\infty}$ et

$$(\text{Op}(a)u, v) = (u, \text{Op}(a^*)v)$$

pour tout u, v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. Un objectif de ce chapitre sera de démontrer un résultat qui étend la proposition précédente au cas d'un symbole général $a \in S^{+\infty}$. Nous commençons par regarder le cas $a \in S^{-\infty}$ car l'analyse est alors beaucoup plus facile. Le lecteur notera en particulier que les intégrales qui apparaissent dans la démonstration ci-dessous n'ont aucun sens si a est un symbole général.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Comme a est à support compact on peut utiliser le théorème de Fubini pour écrire

$$\begin{aligned} \text{Op}(a)u(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \left(\int e^{-iy \cdot \xi} u(y) dy \right) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \left(\int e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) d\xi \right) u(y) dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Op}(a)u(x) = \int K(x, y)u(y) dy$$

où $K = K(x, y)$ (appelé **noyau** de $\text{Op}(a)$) est donné par

$$\begin{aligned} K(x, y) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} (\mathcal{F}_\xi a)(x, y - x), \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_\xi a(x, \zeta) = \int e^{-i\xi \cdot \zeta} a(x, \xi) d\xi$ est la transformée de Fourier de a par rapport à la seconde variable. On en déduit que $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

Maintenant, si v est aussi dans \mathcal{S} alors

$$\begin{aligned} (\text{Op}(a)u, v) &= \int \left(\int K(x, y)u(y) dy \right) \overline{v(x)} dx \\ &= \int u(y) \overline{\left(\int K(x, y)v(x) dx \right)} dy, \end{aligned}$$

donc $(\text{Op}(a)u, v) = (u, (\text{Op}(a))^*v)$ avec

$$(\text{Op}(a))^*v(x) := \int \overline{K(y, x)}v(y) dy.$$

Retenons que $\text{Op}(a)^*$ est un opérateur de noyau

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)} = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\theta} \overline{a(y, \theta)} d\theta.$$

On veut écrire $K^*(x, y)$ sous la forme $K^*(x, y) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}_\xi a^*)(x, y - x)$. Alors

$$\begin{aligned} a^*(x, \xi) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\xi\cdot z} (\mathcal{F}_\xi a^*)(x, z) dz \\ &= \int K^*(x, x+z) e^{iz\cdot\xi} dz \\ &= \int K^*(x, x-y) e^{-iy\cdot\xi} dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int \left(\int e^{i(x-(x-y))\cdot\theta} \overline{a(x-y, \theta)} d\theta \right) e^{-iy\cdot\xi} dy \\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{iy\cdot(\theta-\xi)} \overline{a}(x-y, \theta) dy d\theta \\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{-iy\cdot\eta} \overline{a}(x-y, \xi-\eta) dy d\eta. \end{aligned}$$

Alors, les calculs déjà faits au début de la démonstration entraînent que $\text{Op}(a)^*$ est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole a^* . \square

10.3 Intégrales oscillantes

On se propose dans cette section d'étudier les intégrales oscillantes. Ces d'intégrales, qui jouent un rôle crucial en analyse microlocale, sont de la forme

$$\int e^{i\phi(x)} a(x) dx \quad (x \in \mathbb{R}^N, N \geq 1).$$

On dit que ϕ est une phase et que a est une amplitude. On supposera toujours que a est une fonction C^∞ de \mathbb{R}^N dans \mathbb{C} et que ϕ est à valeurs réelles.

Si a est le symbole d'un opérateur différentiel, polynomial en x , l'intégrale est évidemment divergente au sens classique. Pour donner un sens à l'intégrale $\int e^{i\phi(x)} a(x) dx$, l'idée est que, sous une hypothèse de forte oscillation du terme $e^{i\phi(x)}$, on peut compenser la croissance de a , donner un sens à l'intégrale et montrer des résultats de calculs sur ces intégrales.

A. Lemme de la phase non stationnaire

L'analyse des intégrales oscillantes est basée sur le *lemme de la phase non stationnaire*, qui exprime la décroissance d'une intégrale oscillante en fonction d'un grand paramètre.

Lemme 10.6 (Lemme de la phase non-stationnaire). *Soit $N \geq 1$, $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction à valeurs réelles et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Soit V un voisinage du support de f . On suppose que*

$$\inf_V |\nabla\varphi(x)| > 0.$$

Alors, pour tout entier k et pour tout $\lambda \geq 1$,

$$\left| \int e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx \right| \leq C_k \lambda^{-k} \sup_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

où C_k est une constante indépendante de λ et de f .

Démonstration. Introduisons l'opérateur différentiel

$$L := -i \frac{\nabla\varphi \cdot \nabla}{|\nabla\varphi|^2} \quad \text{où} \quad \nabla\varphi \cdot \nabla = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

L est bien défini car la différentielle de la phase ne s'annule pas. De plus, L vérifie, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$L(e^{i\lambda\varphi}) = \lambda e^{i\lambda\varphi},$$

et donc $L^k(e^{i\lambda\varphi(x)}) = \lambda^k e^{i\lambda\varphi(x)}$. Alors, en faisant des *intégrations par parties* successives, on en déduit

$$\lambda^k \int e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx = \int e^{i\lambda\varphi(x)} ({}^tL)^k f(x) dx,$$

où

$${}^tL f = i \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|\nabla\varphi|^2} \left(f \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right) \right).$$

Alors $({}^tL)^k$ est un opérateur différentiel d'ordre k dont les coefficients sont C^∞ (et dépendent de φ). On obtient donc le résultat voulu en majorant la dernière intégrale par $\|({}^tL)^k f\|_{L^1}$. On obtient de plus que la constante C_k ne dépend que de k , $\inf |\nabla\varphi|^2$ et $\sup_{|\alpha| \leq k+1} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}$. \square

B. Définition d'une intégrale oscillante

Définition 10.7. *Soit $m \geq 0$ un nombre réel. L'espace A^m des amplitudes d'ordre m est l'espace des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ telles que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |(1 + |x|)^{-m} \partial_x^\alpha a(x)| < +\infty$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$. On introduit la norme

$$\|a\|_{m,k} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |(1 + |x|)^{-m} \partial_x^\alpha a(x)|.$$

Nous supposons que ϕ est une forme quadratique non dégénérée, de la forme

$$\phi(x) = (Ax) \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

où $A \in M_N(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique inversible. Alors $\nabla \phi(x) = Ax$ et nous pourrions appliquer le lemme de la phase non stationnaire.

Théorème 10.8. *Soit $m \geq 0$, ϕ une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{R}^N , $a \in A^m$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\psi(0) = 1$. Alors la limite*

$$I_\varepsilon := \int e^{i\phi(x)} a(x) \psi(\varepsilon x) dx$$

converge quand ε tend vers 0 vers une limite indépendante de ψ , qui est égale à $\int e^{i\phi(x)} a(x) dx$ si $a \in L^1$. Quand $a \notin L^1$, on continue de noter la limite $\int e^{i\phi(x)} a(x) dx$ et on a

$$(10.3.1) \quad \left| \int e^{i\phi(x)} a(x) dx \right| \leq C_{\phi,m} \|a\|_{m,m+n+1}.$$

Démonstration. Nous voulons utiliser le lemme de la phase stationnaire, ce qui nécessite de faire apparaître un grand paramètre. Pour cela, nous allons utiliser une décomposition dyadique de l'unité. Rappelons comment obtenir une telle décomposition. Soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ une fonction radiale vérifiant $\chi_0(x) = 1$ pour $|x| \leq 1/2$, et $\chi_0(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$. On pose $\chi(x) = \chi_0(x/2) - \chi_0(x)$. La fonction χ est supportée dans la couronne $1/2 \leq |x| \leq 2$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a l'égalité

$$1 = \chi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \chi(2^{-j}x).$$

Rappelons que la convergence ne pose pas de problèmes car, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\chi(2^{-p}x) = 0$ pour presque tout entier p . Notons

$$S_p(x) = \chi_0(x) + \sum_{j=1}^p \chi(2^{-j}x).$$

Introduisons

$$I_p := \int e^{i\phi(x)} a(x) S_p(x) dx, \quad R_p(\varepsilon) := \int e^{i\phi(x)} a(x) (1 - \psi(\varepsilon x)) S_p(x) dx$$

Après changement de variables $z = 2^{-p}x$,

$$I_p - I_{p-1} = \int e^{i2^{2p}\phi(z)} a(2^p z) \chi(z) 2^{np} dz$$

où l'on a utilisé que $\phi(tz) = t^2\phi(z)$.

Sur le support de $\chi(z)$ on a $|z| \geq 1/2$ donc

$$\inf_{z \in \text{supp } \chi} |\nabla \phi(z)| \geq c_0 > 0$$

et on va pouvoir appliquer le lemme de la phase non stationnaire. En utilisant le lemme 10.6 avec $n = N$, $f(x) = a(2^p x)\chi(x)$, $\lambda = 2^p$. On obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int e^{i2^{2p}\phi(z)} a(2^p z)\chi(z)2^{np} dz \leq C_k 2^{np-2pk} \max_{|\alpha| \leq k} \int_{|x| \leq 1} |\partial_x^\alpha (a(2^p x)\chi(x))| dx,$$

où l'on a utilisé le fait que $\text{supp } \chi$ est contenu dans la boule unité. L'hypothèse que a est une amplitude d'ordre m entraîne qu'il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $p \geq 1$,

$$\int_{|x| \leq 1} |\partial_x^\alpha (a(2^p x)\chi(x))| dx \leq A2^{p(|\alpha|+m)} \|a\|_{m,|\alpha|}.$$

On en déduit que

$$\int e^{i2^{2p}\phi(z)} a(2^p z)\chi(z)2^{pn} dz \leq AC_k 2^{p(n+k+m-2k)} \|a\|_{m,k}.$$

On choisit $k > n + m$ soit $k = n + m + 1$ de sorte que

$$|I_p - I_{p-1}| \leq AC_{n+m+1} 2^{-p} \|a\|_{m,n+m+1}.$$

De même on obtient que

$$|R_p(\varepsilon) - R_{p-1}(\varepsilon)| \leq \varepsilon C 2^{-p}.$$

On en déduit le résultat. □

Exercice. Soit $a \in A^m(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-iy \cdot x} a(y) dy dx = (2\pi)^{-n} \int e^{-iy \cdot x} a(x) dy dx = a(0).$$

Exercice. Soit α et β dans \mathbb{N}^n . Montrer que

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-iy \cdot x} \frac{y^\alpha x^\beta}{\alpha! \beta!} dy dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ (-i)^{|\alpha|} / \alpha! & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

C. Une inégalité d'Hörmander

Le but de ce paragraphe est de démontrer un joli résultat. Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite, mais il est utile de l'étudier car sa démonstration permet de mettre en oeuvre plusieurs idées simples et qui sont très utiles en pratique.

Considérons une famille d'opérateurs T_h , dépendant d'un petit paramètre h , de la forme

$$(T_h f)(\xi) := \int e^{i\phi(x,\xi)/h} a(x,\xi) f(x) dx \quad (x, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Supposons que la phase ϕ est à valeurs réelles et que l'amplitude a est à support compact en x et en ξ . Alors, on vérifie facilement que, pour tout $h > 0$, T_h est une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nous allons démontrer une estimation, due à Hörmander, qui énonce que si la Hessienne mixte $\phi''_{x\xi}$ n'est pas singulière sur le support de l'amplitude, alors $h^{-n/2}T_h$ est uniformément borné dans $\mathcal{L}(L^2)$.

Théorème 10.9. *Soit $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Si $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est à valeurs réelles et vérifie*

$$(x, \xi) \in \text{supp } a \Rightarrow \det \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \xi}(x, \xi) \right] \neq 0,$$

alors il existe une constante C telle que, pour tout $h \in]0, 1]$ et tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|T_h f\|_{L^2} \leq Ch^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}.$$

Démonstration. Nous utiliserons des résultats classiques sur les opérateurs bornés sur $\mathcal{L}(L^2)$. D'abord, que $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2 = \|T^*\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2$. On en déduit que $\|TT^*\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2$. Comme par ailleurs

$$\|T^* f\|_{L^2} = \langle T^* f, T^* f \rangle = \langle TT^* f, f \rangle \leq \|TT^*\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|f\|_{L^2}^2,$$

on vérifie que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2 = \|T^*\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2 = \|TT^*\|_{\mathcal{L}(L^2)}.$$

Par conséquent, il suffit de démontrer que la norme¹ d'opérateur de $T_h T_h^*$ est bornée par Ch^n . Écrivons

$$(T_h T_h^* f)(\xi) = \int K_h(\xi, \eta) f(\eta) d\eta$$

où

$$K_h(\xi, \eta) = \int e^{i(\Phi(x,\xi) - \Phi(x,\eta))/h} a(x, \xi) \bar{a}(x, \eta) dx.$$

On utilise ensuite le lemme de Schur (démontré à la fin de cette preuve) qui énonce qu'un opérateur à noyau, de la forme

$$(Tf)(x) = \int K(x, y) f(y) dy,$$

vérifie

$$2 \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \sup_y \int |K(x, y)| dx + \sup_x \int |K(x, y)| dy.$$

1. On utilise fréquemment le fait qu'il est plus commode d'estimer la norme d'opérateur de TT^* que celle de T ; on dit alors que l'on utilise "l'argument TT^* ".

Il reste donc à estimer le noyau K_h . Quite à introduire une partition de l'unité, on peut toujours supposer que le support de a est inclu dans une boule de diamètre δ petit. On peut donc se borner à considérer le cas où ξ et η sont proches. Alors

$$|\partial_x(\Phi(x, \xi) - \Phi(x, \eta))| = |\Phi''_{x\xi}(x, \eta)(\xi - \eta)| + O(|\xi - \eta|^2) \geq c|\xi - \eta|,$$

et on est en mesure d'utiliser le lemme de la phase non stationnaire pour obtenir la majoration

$$|K_h(\xi, \eta)| \leq C_N \left(\frac{|\xi - \eta|}{h} \right)^{-N},$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Comme par ailleurs K_h est bornée, on en déduit que

$$|K_h(\xi, \eta)| \leq C'_N (1 + |\xi - \eta|/h)^{-N},$$

d'où

$$\sup_{\eta} \int |K_h(\xi, \eta)| d\xi \leq Ch^n, \quad \sup_{\xi} \int |K_h(\xi, \eta)| d\eta \leq Ch^n,$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Lemme 10.10 (Lemme de Schur). *Soit $K(x, y)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que*

$$\sup_y \int |K(x, y)| dx \leq A_1, \quad \sup_x \int |K(x, y)| dy \leq A_2.$$

Alors l'opérateur P de noyau K , défini pour $u \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ par

$$Pu(x) = \int K(x, y)u(y) dy$$

se prolonge de façon unique en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|Pu\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \|u\|_{L^2}.$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|Pu(x)|^2 \leq \int |K(x, y)| |u(y)|^2 dy \int |K(x, y)| dy \leq A_2 \int |K(x, y)| |u(y)|^2 dy,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int |Pu(x)|^2 dx &\leq A_2 \iint |K(x, y)| |u(y)|^2 dy dx = A_2 \int |u(y)|^2 \left(\int |K(x, y)| dx \right) dy \\ &\leq A_1 A_2 \int |u(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Ce qui implique l'inégalité voulue. \square

Remarque 10.11. En guise d'illustration nous démontrons une inégalité classique à partir du lemme de Schur. Démontrons que, si $f \in L^1$ et $g \in L^2$, alors $\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}$. Pour cela, observons que

$$f * g(x) = \int f(x - y)g(y) dy = \int K(x, y)g(y) dy$$

où $K(x, y) = f(x - y)$. L'inégalité voulue provient du lemme de Schur avec $A = \|f\|_{L^1}$.

10.4 Adjoint et composition

Pour énoncer le résultat principal de ce chapitre, il est commode d'utiliser la définition suivante.

Définition 10.12. Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées f telles que $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}^n)$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{H^s}^2 := \frac{1}{(2\pi)^n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit qu'un opérateur est d'ordre m s'il est borné de $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemples :

- l'identité est un opérateur d'ordre 0 et le Laplacien est un opérateur d'ordre 2 ;
- un opérateur différentiel $P = \sum_{|\alpha| \leq k} p_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $p_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur d'ordre k (non trivial à démontrer en partant de la définition des espaces de Sobolev pour $\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$) ;
- l'opérateur de convolution par une fonction dans la classe de Schwartz est un opérateur d'ordre $-\infty$ (ce qui veut dire qu'il est d'ordre $-n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou encore qu'il envoie $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \cup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^n) = \cap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$).

Dans ce chapitre, nous démontrerons (et donnerons un sens à) l'énoncé suivant.

Théorème 10.13. *i) Si $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ alors $\text{Op}(a)$ est d'ordre m .*

ii) Supposons que $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ et $b \in S^{m'}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\text{Op}(a) \circ \text{Op}(b)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole noté $a \# b$ et défini par

$$a \# b(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y) \cdot (\xi - \eta)} a(x, \xi) b(y, \eta) d\xi dy.$$

De plus $\text{Op}(a) \circ \text{Op}(b) = \text{Op}(ab) + R$ où R est d'ordre $m + m' - 1$ et plus généralement

$$\text{Op}(a) \circ \text{Op}(b) - \text{Op} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} (\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)) (\partial_x^\alpha b(x, \xi)) \right) \text{ est d'ordre } m + m' - k - 1,$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

iii) L'adjoint $\text{Op}(a)^$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole a^* défini par*

$$a^*(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \iint e^{-iy \cdot \eta} \bar{a}(x - y, \xi - \eta) dy d\eta.$$

De plus $\text{Op}(a)^ = \text{Op}(\bar{a}) + R$ où R est d'ordre $m - 1$ et plus généralement*

$$\text{Op}(a^*) - \text{Op} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \bar{a}(x, \xi) \right) \text{ est d'ordre } m - k - 1,$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Corollaire 10.14. Si $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ et $b \in S^{m'}(\mathbb{R}^n)$, alors le commutateur

$$[\text{Op}(a), \text{Op}(b)] = \text{Op}(a) \circ \text{Op}(b) - \text{Op}(b) \circ \text{Op}(a)$$

est un opérateur d'ordre $m + m' - 1$ dont le symbole c peut s'écrire sous la forme

$$c = \frac{1}{i} \{a, b\} + c' \quad \text{où } c' \in S^{m+m'-2} \quad \text{et}$$

$$\{a, b\} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} - \frac{\partial b}{\partial \xi_j} \frac{\partial a}{\partial x_j}.$$

Pour démontrer le théorème 10.13 nous commençons par la proposition suivante.

Proposition 10.15. Soit $m \in \mathbb{R}$. Si $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ alors l'intégrale oscillante

$$a^*(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \iint e^{-iy \cdot \eta} \bar{a}(x - y, \xi - \eta) \, dy \, d\eta$$

définit un symbole a^* qui appartient à $S^m(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Notons $\phi(y, \eta) = -y \cdot \eta$. Alors ϕ est une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{R}^{2n} (on a $\phi(X) = (AX) \cdot X$ où A est la matrice symétrique inversible $A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$). à (x, ξ) fixé on note $b_{x, \xi}(y, \eta) = \bar{a}(x - y, \xi - \eta)$. Pour étudier $b_{x, \xi}$, nous allons utiliser l'inégalité suivante.

Lemme 10.16 (Lemme de Peetre). Rappelons la notation

$$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Soit $n \geq 1$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ et tout ξ, η dans \mathbb{R}^n , on a

$$\langle \xi + \eta \rangle^m \leq 2^{|m|} \langle \xi \rangle^{|m|} \langle \eta \rangle^m.$$

Démonstration. D'après l'inégalité triangulaire

$$1 + |\xi + \eta|^2 \leq 1 + (|\xi| + |\eta|)^2 \leq 1 + 2|\xi|^2 + 2|\eta|^2 \leq 4(1 + |\xi|^2)(1 + |\eta|^2)$$

donc $\langle \xi + \eta \rangle^2 \leq 2^2 \langle \xi \rangle^2 \langle \eta \rangle^2$ et on en déduit l'inégalité voulue pour $m \geq 0$. Considérons maintenant $m < 0$ de sorte que $-m > 0$. On peut alors utiliser l'inégalité avec $-m > 0$ pour obtenir

$$\langle \eta \rangle^{-m} \leq 2^{-m} \langle \xi + \eta \rangle^{-m} \langle -\xi \rangle^{-m},$$

ce qui implique le résultat voulu en divisant par $\langle \eta \rangle^{-m} \langle \xi + \eta \rangle^{-m}$. □

Le lemme précédent implique que

$$\langle \xi - \eta \rangle^m \leq 2^{|m|} \langle \xi \rangle^m \langle \eta \rangle^{|m|} \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, l'hypothèse que a est un symbole entraîne que

$$\begin{aligned} |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a(x - y, \xi - \eta)| &\leq C_{\alpha\beta} \langle \xi - \eta \rangle^{m-|\beta|} \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi - \eta \rangle^m \\ &\leq C_{\alpha\beta} 2^{|m|} \langle \xi \rangle^m \langle \eta \rangle^{|m|} \\ &\leq C_{\alpha\beta} 2^{|m|} \langle \xi \rangle^m (1 + |y|^2 + |\eta|^2)^{|m|/2} \end{aligned}$$

pour tout α, β dans \mathbb{N}^n . Par définition des classes d'amplitudes, on en déduit que

$$b_{x,\xi} \in A^{|m|}(\mathbb{R}^{2n})$$

et de plus

$$\|b_{x,\xi}\|_{|m|, |m|+2n+1} = \max_{|\alpha|+|\beta| \leq |m|+2n+1} |\langle (y, \eta) \rangle^{-|m|} \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta b_{x,y}(y, \eta)| \leq C \langle \xi \rangle^m.$$

Comme $a^*(x, \xi)$ est une intégrale oscillante :

$$a^*(x, \xi) = \iint e^{i\phi(y,\eta)} b_{x,\xi}(y, \eta) dy d\eta,$$

l'estimation précédente et l'inégalité (10.3.1) impliquent que $\langle \xi \rangle^{-m} a^*$ est une fonction bornée. Il reste à estimer les dérivées. Pour cela nous allons démontrer que a^* est C^∞ et que pour tout multi-indices α, β on a

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a^*) = (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a)^*.$$

Admettons cette identité. Alors l'argument précédent appliqué avec le symbole $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|}(\mathbb{R}^n)$ au lieu de $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ implique que $\langle \xi \rangle^{-(m-|\beta|)} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a^*)$ est bornée pour tout α, β dans \mathbb{N}^n . Ce qui prouve que a^* est dans $S^m(\mathbb{R}^n)$.

Il reste à démontrer que $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a^*) = (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a)^*$. Pour cela nous allons montrer que l'on peut différencier l'intégrale oscillante qui définit a^* sous le signe somme. Rappelons que pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ telle que $\psi(0) = 1$ on a

$$a^*(x, \xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy \cdot \eta} \bar{a}(x - y, \xi - \eta) \psi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) dy d\eta.$$

Nous allons utiliser encore une fois un argument d'intégration par parties qui repose sur l'identité

$$(1 + |y|^2)^{-k} (1 + |\eta|^2)^{-k} (I - \Delta_y)^k (I - \Delta_\eta)^k e^{-iy \cdot \eta} = e^{-iy \cdot \eta}.$$

Comme on intègre des fonctions régulières à support compact, on peut intégrer par parties et obtenir que

$$\begin{aligned} & \iint e^{-iy\cdot\eta} \bar{a}(x-y, \xi-\eta) \psi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) \, dy \, d\eta \\ &= \iint e^{-iy\cdot\eta} (I - \Delta_y)^k (I - \Delta_\eta)^k \left[\frac{\bar{a}(x-y, \xi-\eta) \psi(\varepsilon y, \varepsilon \eta)}{(1+|y|^2)^k (1+|\eta|^2)^k} \right] \, dy \, d\eta. \end{aligned}$$

Rappelons que l'on a montré que

$$|\partial_y^\gamma \partial_\eta^\delta a(x-y, \xi-\eta)| \leq C_{\gamma\delta} 2^{|\delta m|} \langle \xi \rangle^m (1+|\eta|^2)^{|\delta m|/2}.$$

Par ailleurs

$$|\partial_y^\gamma (1+|y|^2)^{-k}| \leq C_{k,\gamma} (1+|y|^2)^{-k}, \quad |\partial_\eta^\delta (1+|\eta|^2)^{-k}| \leq C_{k,\delta} (1+|\eta|^2)^{-k}.$$

On vérifie alors facilement que, si $k > (n + |m|)/2$, alors on peut utiliser le théorème de convergence dominée et en déduire que

$$a^*(x, \xi) = \iint e^{-iy\cdot\eta} (I - \Delta_y)^k (I - \Delta_\eta)^k \left[\frac{\bar{a}(x-y, \xi-\eta)}{(1+|y|^2)^k (1+|\eta|^2)^k} \right] \, dy \, d\eta.$$

L'astuce est que l'on a écrit $a^*(x, \xi)$ sous la forme d'une intégrale convergente au sens de Lebesgue, et dont l'intégrande dépend de façon C^∞ des paramètres x, ξ . On vérifie pour conclure que l'on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme pour les intégrales convergentes au sens usuel de Lebesgue. \square

Proposition 10.17. *Soit $m \in \mathbb{R}$ et $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout u, v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$(\text{Op}(a)u, v) = (u, \text{Op}(a^*)v),$$

où $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} \, dx$.

Démonstration. Pour démontrer ce résultat nous allons faire l'hypothèse supplémentaire que a est à support compact en x .

La démonstration est basée sur des arguments de continuité et on commence par munir les classes de symboles $S^m(\mathbb{R}^n)$ de la topologie la plus naturelle, qui est celle d'espace de Fréchet². Rappelons que la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est aussi un espace de Fréchet dont la topologie est induite par la famille de semi-normes suivante, indexée par $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{M}_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)|.$$

2. Un espace vectoriel topologique réel est appelé espace de Fréchet s'il est à la fois localement convexe et métrisable par une distance complète et invariante par translation. Rappelons qu'un espace vectoriel topologique E est dit localement convexe s'il existe une famille de semi-normes \mathcal{P} telle que la topologie de E est initiale pour les applications $\{x \mapsto p(x-y); y \in E, p \in \mathcal{P}\}$.

La convergence d'une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ équivaut donc à

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}_p(\varphi_k - \varphi) = 0.$$

De façon similaire, la topologie sur la classe de symboles $S^m(\mathbb{R}^n)$ est induite par la famille de semi-normes suivante, indexée par $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}_p^m(a) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq p} \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left\{ \langle \xi \rangle^{-(m-|\beta|)} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \right\}.$$

La convergence d'une suite de symboles équivaut à la convergence au sens des semi-normes : pour $m \in \mathbb{R}$ on dit qu'une suite (a_k) de symboles appartenant à $S^m(\mathbb{R}^n)$ converge vers a dans $S^m(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}_p^m(a_k - a) = 0.$$

Lemme 10.18. *Soit $m \in \mathbb{R}$, $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ et (a_k) une suite de symboles appartenant à $S^m(\mathbb{R}^n)$ et qui converge vers a dans $S^m(\mathbb{R}^n)$.*

i) Pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la suite $(\text{Op}(a_k)u)$ converge vers $\text{Op}(a)u$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

ii) La suite (a_k^) converge vers a^* dans $S^m(\mathbb{R}^n)$.*

iii) Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $b \in S^\ell(\mathbb{R}^n)$ et (b_ℓ) une suite de symboles appartenant à $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ et qui converge vers b dans $S^\ell(\mathbb{R}^n)$. Alors $(a_k b_k)$ converge vers ab dans $S^{m+\ell}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. *i)* On a déjà vu que si $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\text{Op}(a)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La démonstration de ce résultat entraîne directement le résultat énoncé au point *i)*. De même la proposition précédente démontre le résultat de continuité énoncé au point *ii)*. Enfin, le résultat énoncé au point *iii)* est une conséquence directe de la règle de Leibniz. \square

Lemme 10.19. *Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\chi(0) = 1$. Introduisons $r_\varepsilon(\xi) = \chi(\varepsilon\xi) - 1$. Alors r_ε converge vers 0 dans $S^1(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. On va montrer que $|\partial_\xi^\alpha r_\varepsilon(\xi)| \leq C_\alpha \varepsilon \langle \xi \rangle^{1-|\alpha|}$ pour tout multi-indice α dans \mathbb{N}^n . Pour $\alpha = 0$ on écrit

$$r_\varepsilon(\xi) = \varepsilon \int_0^1 \chi'(t\varepsilon\xi) \cdot \xi dt$$

et on en déduit $\langle \xi \rangle^{-1} r_\varepsilon(\xi) = O(\varepsilon)$ car χ' est bornée. Pour $|\alpha| > 0$, on vérifie directement que

$$|\langle \xi \rangle^{|\alpha|-1} \partial_\xi^\alpha r_\varepsilon(\xi)| = \varepsilon |\varepsilon^{|\alpha|-1} \langle \xi \rangle^{|\alpha|-1} \partial_\xi^\alpha \chi(\varepsilon\xi)|$$

puis on utilise la majoration

$$|\varepsilon^{|\alpha|-1} \langle \xi \rangle^{|\alpha|-1} \partial_\xi^\alpha \chi(\varepsilon\xi)| \leq |\langle \varepsilon\xi \rangle^{|\alpha|-1} \partial_\xi^\alpha \chi(\varepsilon\xi)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |\langle \zeta \rangle^{|\alpha|-1} \partial_\xi^\alpha \chi(\zeta)|$$

pour obtenir le résultat désiré. \square

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème. Considérons un symbole $a = a(x, \xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$. On fixe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\chi(0) = 1$ et on introduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k(x, \xi) = \chi\left(\frac{\xi}{k}\right) a(x, \xi).$$

Comme a_k est à support compact en ξ et aussi en x (par hypothèse supplémentaire sur a) on peut appliquer la proposition 10.5 pour écrire que

$$(10.4.1) \quad (\text{Op}(a_k)u, v) = (u, \text{Op}(a_k^*)v).$$

Pour démontrer le théorème, il nous reste à voir que l'on peut passer à la limite dans cette égalité. Pour cela on commence par combiner le lemme 10.19 avec le point *iii*) du lemme 10.18 pour obtenir que (a_k) converge vers a dans $S^{m'}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $m' > m$. Le point *ii*) du lemme 10.18 implique alors que (a_k^*) converge vers a^* dans $S^{m'}(\mathbb{R}^n)$. On peut alors appliquer le point *i*) de ce lemme pour obtenir que $\text{Op}(a_k)u$ converge vers $\text{Op}(a)u$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et de même on obtient que $\text{Op}(a_k^*)u$ converge vers $\text{Op}(a^*)u$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On peut alors passer à la limite dans l'identité (10.4.1), ce qui conclut la démonstration. \square

On peut maintenant définir l'action de $\text{Op}(a)$ sur une distribution tempérée. Pour cela rappelons le principe que nous avons vu dans le chapitre sur la transformée de Fourier. Soit $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ avec $m \in \mathbb{R}$. Alors $\text{Op}(a): \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une application linéaire continue. On définit alors un opérateur A de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\forall (u, v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle \text{Op}(a)u, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle u, \overline{\text{Op}(a^*)v} \rangle.$$

Alors la proposition 5.18 montre que l'opérateur A ainsi défini prolonge la définition de $\text{Op}(a)$. On le note donc encore $\text{Op}(a)$.

Nous allons pour conclure ce paragraphe considérer la composition des opérateurs pseudo-différentiels.

Soit $A_1 = \text{Op}(a_1)$ et $A_2 = \text{Op}(a_2)$ deux opérateurs pseudo-différentiels. Supposons que a_1 et a_2 appartiennent à $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et considérons $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$A_1 A_2 u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a_1(x, \xi) \widehat{A_2 u}(\xi) \, d\xi$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{A_2 u}(\xi) &= \int e^{-iy \cdot \xi} A_2 u(y) \, dy \\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{-iy \cdot (\xi - \eta)} a_2(y, \eta) \widehat{u}(\eta) \, d\eta \, dy \end{aligned}$$

donc

$$A_1 A_2 u(x) = (2\pi)^{-2n} \iiint e^{iy \cdot \eta + i\xi \cdot (x-y)} a_1(x, \xi) a_2(y, \eta) \widehat{u}(\eta) \, d\xi \, dy \, d\eta.$$

Ainsi on a

$$A_1 A_2 u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \eta} \left((2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y) \cdot (\xi-\eta)} a_1(x, \xi) a_2(y, \eta) \, d\xi \, dy \right) \widehat{u}(\eta) \, d\eta.$$

Formellement $A_1 A_2 = \text{Op}(b)$ où

$$(10.4.2) \quad b(x, \eta) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y) \cdot (\xi-\eta)} a_1(x, \xi) a_2(y, \eta) \, d\xi \, dy.$$

La formule qui définit b est encore une convolution en les variables (y, η) (à (x, ξ) fixés), c'est pour cela que l'on va pouvoir appliquer la même preuve qu'au passage précédent.

Proposition 10.20. *Si $a_1 \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ et $a_2 \in S^{m_2}(\mathbb{R}^n)$, alors $\text{Op}(a_1) \circ \text{Op}(a_2) = \text{Op}(b)$, où $b = a_1 \# a_2 \in S^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n)$ est donné par l'intégrale oscillante*

$$b(x, \eta) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y) \cdot (\xi-\eta)} a_1(x, \xi) a_2(y, \eta) \, d\xi \, dy.$$

Nous ne verrons pas la démonstration, analogue à celle concernant l'adjoint.

Nous avons vu dans cette section que, pour tout $m \in \mathbb{R}$ et tout $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$, on peut définir $\text{Op}(a)$ sur l'espace des distributions tempérées. En particulier on peut définir $\text{Op}(a)u$ pour tout u dans un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s \in \mathbb{R}$ quelconque. Grâce à la proposition précédente sur la composition, nous allons maintenant voir que $\text{Op}(a)$ est un opérateur d'ordre m comme cela a été affirmé dans le point *i*) du théorème 10.13.

Proposition 10.21. *Soit $m \in \mathbb{R}$ et $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur $\text{Op}(a)$ applique $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $s \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour $\mu \in \mathbb{R}$, notons $(1 - \Delta)^{\mu/2}$ le multiplicateur de Fourier de symbole $\langle \xi \rangle^\mu = (1 + |\xi|^2)^{\mu/2}$. Alors $(1 - \Delta)^{\mu/2}$ est un isomorphisme de $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il suffit donc de montrer que l'opérateur

$$A_{s,m} := (I - \Delta)^{(s-m)/2} \circ \text{Op}(a) \circ (I - \Delta)^{-s/2}$$

est borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Remarquons que si $b = b(\xi)$ alors

$$\text{Op}(a) \circ \text{Op}(b) = \text{Op}(ab)$$

donc $\text{Op}(a) \circ (1 - \Delta)^{-s/2}$ est l'opérateur de symbole $a(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-s}$. Comme $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ et que $\langle \xi \rangle^{-s} \in S^{-s}(\mathbb{R}^n)$, le produit de ces deux symboles appartient à $S^{m-s}(\mathbb{R}^n)$. D'un autre côté, pour manipuler $(I - \Delta)^{(s-m)/2} \circ \text{Op}(a \langle \xi \rangle^{-s/2})$, on utilise le théorème de composition qui implique que $A_{s,m}$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole appartient à $S^0(\mathbb{R}^n)$. C'est donc un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ d'après le théorème de continuité démontré dans le chapitre précédent. \square

Il reste pour conclure à démontrer la partie concernant le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels. Pour cela, introduisons la notion de somme asymptotique de symboles. Cette notion permet de donner un sens rigoureux à des affirmations telles que : a est la somme d'un terme (généralement son symbole dit principal) et d'un reste "meilleur".

Définition 10.22. Soit $a_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n)$ une suite indexée par $j \in \mathbb{N}$ de symboles, telle que m_j décroît vers $-\infty$. On dira que $a \in S^{m_0}(\mathbb{R}^n)$ est la somme asymptotique des a_j si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a - \sum_{j=0}^k a_j \in S^{m_{k+1}}(\mathbb{R}^n).$$

On note alors $a \sim \sum a_j$.

Proposition 10.23. *i)* Soit $m \in \mathbb{R}$ et $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$a^* \sim \sum_j A_j \quad \text{avec} \quad A_j = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \bar{a}.$$

ii) Soit $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Si $a_1 \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ et $a_2 \in S^{m_2}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$a_1 \# a_2 \sim \sum_j A_j \quad \text{avec} \quad A_j = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} (\partial_\xi^\alpha a_1) (\partial_x^\alpha a_2).$$

Remarque. Dans la pratique, par abus de notations, on écrit simplement

$$a^* \sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \bar{a}$$

et

$$a_1 \# a_2 \sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} (\partial_\xi^\alpha a_1) (\partial_x^\alpha a_2).$$

Démonstration. Nous nous bornerons à démontrer le point *i)*. On utilise la formule de Taylor (dont l'énoncé est rappelé ci-dessous après la démonstration de la proposition)

$$\bar{a}(x - y, \xi - \eta) = \sum_{|\alpha+\beta| < 2k} \frac{(-y)^\alpha (-\eta)^\beta}{\alpha! \beta!} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}(x, \xi) + r_k(x, \xi, y, \eta)$$

avec

$$r_k(x, \xi, y, \eta) = \sum_{|\alpha+\beta|=2k} 2k \frac{(-y)^\alpha (-\eta)^\beta}{\alpha! \beta!} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta)$$

et

$$r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) = \int_0^1 (1-t)^{2k-1} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}(x - ty, \xi - t\eta) dt.$$

Plus haut on a proposé de démontrer en exercice que, pour tout α et β dans \mathbb{N}^n ,

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-iy \cdot x} \frac{y^\alpha x^\beta}{\alpha! \beta!} dy dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ (-i)^{|\alpha|} / \alpha! & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Ce résultat implique que la somme sur $|\alpha + \beta| < 2k$ correspond au développement asymptotique recherché pour a^* . Il ne reste alors plus qu'à démontrer que

$$\int e^{-iy \cdot \eta} r_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta \in S^{m-k}.$$

Nous allons intégrer par parties pour traiter $r_{\alpha\beta}$. En notant simplement $*$ des constantes numériques différentes, on obtient³

$$\begin{aligned} & \int e^{-iy \cdot \eta} y^\alpha \eta^\beta r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta \\ &= * \int \partial_\eta^\alpha (e^{-iy \cdot \eta}) \eta^\beta r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta \\ &= * \int e^{-iy \cdot \eta} \sum_\gamma (\partial_\eta^\gamma \eta^\beta) \partial_\eta^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta \\ &= \sum_\gamma * \int e^{-iy \cdot \eta} \eta^{\beta-\gamma} \partial_\eta^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta \\ &= \sum_\gamma * \int e^{-iy \cdot \eta} \partial_y^{\beta-\gamma} \partial_\eta^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta. \end{aligned}$$

Par définition de $r_{\alpha\beta}$, on a

$$\partial_y^{\beta-\gamma} \partial_\eta^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) = * \int_0^1 (1-t)^{2k-1} t^{2k-2|\gamma|} \partial_x^{\alpha+\beta-\gamma} \partial_\xi^{\alpha+\beta-\gamma} \bar{a}(x-ty, \xi-t\eta) dt.$$

Comme $\gamma \leq \alpha$ et $\gamma \leq \beta$ on a $|\gamma| \leq k$ et $|\alpha + \beta - \gamma| \geq k$, donc $\partial_x^{\alpha+\beta-\gamma} \partial_\xi^{\alpha+\beta-\gamma} \bar{a} \in S^{m-k}$.
Alors

$$\int e^{-iy \cdot \eta} r_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta = \int e^{-iy \cdot \eta} s_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta$$

où s_k est une amplitude $s_k \in A^{|m-k|}$ avec

$$\|s_k\|_{|m-k|, |m-k|+2n+1} \leq C_k \langle \xi \rangle^{m-k}.$$

On en déduit que

$$\langle \xi \rangle^{k-m} \int e^{-iy \cdot \eta} r_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta$$

est borné et ensuite que $\int e^{-iy \cdot \eta} r_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta$ appartient à S^{m-k} . \square

Afin d'être complet, nous rappelons la version suivante du développement de Taylor qui a été utilisé ci-dessus.

3. Si $a \in A^m$ et $b \in A^\ell$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on a,

$$\int e^{i\phi(x)} a(x) \partial^\alpha b(x) dx = \int b(x) (-\partial)^\alpha (e^{i\phi(x)} a(x)) dx.$$

Théorème 10.24. Soit u une fonction de classe C^k sur \mathbb{R}^n . Alors pour tout x et y dans \mathbb{R}^n on a

$$u(x+y) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{k}{\alpha!} y^\alpha \int_0^1 (1-t)^{k-1} (\partial_x^\alpha u)(x+ty) dt.$$

Démonstration. On vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha u(x+ty) \right) &= \sum_{|\beta|=k} \left(\sum_{\alpha \leq \beta, |\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} \right) y^\beta (\partial_x^\beta u)(x+ty) \\ &= \sum_{|\beta|=k} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\beta_j}{\beta!} \right) y^\beta (\partial_x^\beta u)(x+ty) \\ &= \sum_{|\beta|=k} \frac{k}{\beta!} y^\beta (\partial_x^\beta u)(x+ty). \end{aligned}$$

Donc la fonction

$$v(t) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} (1-t)^{|\alpha|} y^\alpha (\partial_x^\alpha u)(x+ty)$$

vérifie $v(1) = u(x+y)$ et

$$v(0) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha u(x), \quad \partial_t v_k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k}{\alpha!} y^\alpha (1-t)^{k-1} (\partial_x^\alpha u)(x+ty)$$

de sorte que la formule de Taylor est une conséquence du théorème fondamental du calcul intégral. \square

10.5 Applications du calcul symbolique

10.5.1 Action sur les espaces de Sobolev

Nous allons donner une autre démonstration du résultat suivant que nous avons déjà vu au chapitre précédent.

Théorème 10.25. Si $a \in S^0(\mathbb{R}^n)$ alors $\text{Op}(a)$ est borné sur L^2 .

Démonstration. Posons $A = \text{Op}(a)$. L'idée est la suivante, comme

$$\|Au\|_{L^2}^2 = (Au, Au) = (A^*Au, u),$$

pour montrer l'inégalité $\|Au\|_{L^2}^2 \leq M \|u\|_{L^2}^2$ pour un certain $M > 0$, il suffit de montrer que $(Bu, u) \geq 0$ où $B = M - A^*A$. Notons que B est un opérateur auto-adjoint. Pour

prouver que B est positif pour M assez grand, nous allons montrer que l'on peut écrire, approximativement, B sous la forme d'un carré. Précisément, nous allons montrer que l'on peut écrire B sous la forme

$$B = C^*C + R,$$

où $C = \text{Op}(c)$ avec $c \in S^0(\mathbb{R}^n)$ et $R = \text{Op}(r)$, $r \in S^{-1}$.

Choisissons $M \geq 2 \sup |a(x, \xi)|^2$, et prenons :

$$c(x, \xi) = (M - |a(x, \xi)|^2)^{1/2}.$$

On vérifie assez facilement que c appartient à $S^0(\mathbb{R}^n)$. Le théorème de composition des opérateurs implique que $C^*C = M - A^*A + R$ où $R = \text{Op}(r)$ avec $r \in S^{-1}$. Ainsi

$$\|Au\|_{L^2}^2 \leq M \|u\|_{L^2}^2 + (Ru, u).$$

Il faut maintenant majorer l'erreur (Ru, u) . Comme $\|Ru\|_{L^2}^2 = (Ru, Ru) = (R^*Ru, u)$, R sera continu dans L^2 si R^*R l'est, avec

$$\|R\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|R^*R\|_{L^2 \rightarrow L^2}^{1/2}.$$

Or $r^* \# r \in S^{-2}$: en itérant l'argument on voit qu'il suffit de montrer que, pour k assez grand, tout opérateur de symbole $r \in S^{-k}$ est continu sur L^2 . Nous allons montrer ce résultat en utilisant le lemme de Schur et la remarque suivante : si $r \in S^{-n-1}$ alors le noyau $K(x, y)$ de $\text{Op}(r)$ est une fonction continue est bornée, car

$$|K(x, y)| \leq (2\pi)^{-n} \int |r(x, \xi)| d\xi \leq \frac{C_0}{(2\pi)^n} \int \frac{d\xi}{(1 + |\xi|)^{n+1}} \leq C.$$

De plus, $(x_j - y_j)K(x, y)$ est le noyau de $\text{Op}(i\partial_{\xi_j}r) \in \text{Op} S^{-n-2} \subset \text{Op} S^{-n-1}$ donc en itérant $(n+1)$ fois, on trouve finalement $(1 + |x - y|^{n+1})K(x, y) \leq C$. La décroissance de K à l'infini implique en particulier :

$$\int |K(x, y)| dx \leq A, \quad \int |K(x, y)| dy \leq A.$$

On conclut la démonstration avec le lemme de Schur. □

10.5.2 Applications aux problèmes sous-elliptiques

Proposition 10.26. *Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $e \in S^\mu$ un symbole tel que*

$$|e(x, \xi)| \geq c(1 + |\xi|)^\mu \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Alors e^{-1} appartient à $S^{-\mu}$. De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe des constantes $K_0, K_1 > 0$ telles que, pour tout $u \in H^s$,

$$\|u\|_{H^s} \leq K_0 \|\text{Op}(e)u\|_{H^{s-\mu}} + K_1 \|u\|_{H^{s-1}}.$$

Démonstration. Le fait que $e^{-1} \in S^{-\mu}$ se démontre directement. Alors $e \# e^{-1} = 1 + b$ avec $b \in S^{-1}$ et on en déduit $\text{Op}(e^{-1}) \text{Op}(e)u = \text{Op}(1)u + \text{Op}(b)u = u + \text{Op}(b)u$ donc

$$\|u\|_{H^s} \leq \|\text{Op}(e^{-1})\|_{\mathcal{L}(H^{s-\mu}; H^s)} \|\text{Op}(e)u\|_{H^{s-\mu}} + \|\text{Op}(b)\|_{\mathcal{L}(H^s, H^{s-1})} \|u\|_{H^s},$$

ce qui est le résultat voulu. \square

Proposition 10.27 (Inégalité de Gårding). *Soit $m \in \mathbb{R}$ et $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ un symbole tel que*

$$\text{Re } a(x, \xi) \geq c(1 + |\xi|)^m$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors il existe des constantes $C_0, C_1 > 0$ telles que

$$\text{Re}(\text{Op}(a)u, u) \geq C_0 \|u\|_{H^{m/2}}^2 - C_1 \|u\|_{H^{(m-1)/2}}^2.$$

Remarque. La proposition précédente reste vraie si a est un symbole à valeurs matricielles (dans ce cas $\text{Re } a = a + a^*$). La démonstration se réduit à montrer que, pour tout symbole $a \in S^0$ tel que $a(x, \xi)$ est hermitienne uniformément [pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$] définie positive, il existe $b \in S^0$ tel que $b(x, \xi)^* b(x, \xi) = a(x, \xi)$.

Démonstration. Pour démontrer cette inégalité, qui est une relation entre la positivité d'un symbole et celle de l'opérateur associé, nous allons utiliser le calcul symbolique des Ψ DO pour écrire $A = \text{Op}(a)$ sous la forme d'un carré (c'est-à-dire P^*P) plus un opérateur d'ordre $m - 1$.

Posons

$$B := \text{Re } A = \frac{1}{2}(A + A^*),$$

de sorte que $\text{Re}(Au, u) = (Bu, u)$. Comme $A^* \in \text{Op}(\bar{a}) + \text{Op } S^{m-1}$, on a $B = \text{Op}(b)$ avec $b = \frac{1}{2}(a + a^*) = \text{Re } a + d$ où $d \in S^{m-1}$.

On note alors e la racine carrée positive de $\text{Re } a$, qui est un symbole appartenant à $S^{m/2}$. De plus, la composition des symboles est telle que

$$f := e^* \# e - \text{Re } a \in S^{m-1}.$$

On en déduit que $b = e^* \# e + g$ où $g = d - f \in S^{m-1}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \text{Re}(Au, u) &= (\text{Op}(b)u, u) \\ &= (\text{Op}(e)^* \text{Op}(e)u, u) + (\text{Op}(g)u, u) \\ &= \|\text{Op}(e)u\|_{L^2}^2 + (\text{Op}(g)u, u) \\ &\geq \|\text{Op}(e)u\|_{L^2}^2 - \|\text{Op}(g)u\|_{H^{\frac{1-m}{2}}} \|u\|_{H^{\frac{m-1}{2}}}. \end{aligned}$$

La proposition précédente implique que

$$\|u\|_{H^{\frac{m}{2}}} \leq K_0 \|\text{Op}(e)u\|_{L^2} + K_1 \|u\|_{H^{\frac{m}{2}-1}},$$

et le théorème de continuité des Ψ DOs implique que

$$\|\text{Op}(g)u\|_{H^{\frac{1-m}{2}}} \leq K_2 \|u\|_{H^{\frac{m-1}{2}}}.$$

En combinant les inégalités précédentes on obtient le résultat voulu. \square

Exercice. Montrer l'amélioration suivante. Soit $m \in \mathbb{R}_+$ et $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Supposons qu'il existe deux constantes c, R telles que,

$$|\xi| \geq R \Rightarrow \text{Re } a(x, \xi) \geq c |\xi|^m.$$

Alors, pour tout N il existe une constante C_N telle que,

$$\text{Re}(Au, u) \geq \frac{c}{2} \|u\|_{H^{m/2}}^2 - C_N \|u\|_{H^{-N}}^2,$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. [On utilisera les inégalités suivantes : *i*) $2xy \leq \eta x^2 + (1/\eta)y^2$ et *ii*), pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N > 0$, il existe $C_{\varepsilon, N} > 0$ telle que

$$\|u\|_{H^{-1}} \leq \varepsilon \|u\|_{L^2} + C_{\varepsilon, N} \|u\|_{H^{-N}}.$$

Qui résulte de l'inégalité facile $\langle \xi \rangle^{-2} \leq \varepsilon^2 + C_{\varepsilon, N} \langle \xi \rangle^{-2N}$.

Rappelons la notation du crochet de Poisson,

$$\{a, b\} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} - \frac{\partial b}{\partial \xi_j} \frac{\partial a}{\partial x_j}.$$

Théorème 10.28. Soit $P = \text{Op}(p)$ un opérateur pseudo-différentiel tel que $p = p_1 + p_0$ avec $p_1 \in S^1(\mathbb{R}^n)$ et $p_0 \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Supposons qu'il existe une constante c telle que,

$$i\{p_1, \bar{p}_1\} > c(1 + |\xi|).$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{H^{1/2}} \leq C \|Pu\|_{L^2} + C \|u\|_{L^2}.$$

Remarque. La condition précédente sur $i\{p_1, \bar{p}_1\}$ s'appelle la condition d'hypoellipticité d'Hörmander. On vérifie facilement que pour tout $p \in C^1(\mathbb{R}^n)$ à valeurs complexes, le crochet de Poisson $i\{p, \bar{p}\}$ est une fonction à valeurs réelles.

Démonstration. Introduisons l'opérateur $Q = P^*P - PP^*$. Alors

$$\begin{aligned} \|Pu\|_{L^2}^2 &= (P^*Pu, u) \\ &= (PP^*u, u) + ((P^*P - PP^*)u, u) \\ &= \|P^*u\|_{L^2}^2 + (Qu, u) \\ &\geq (Qu, u). \end{aligned}$$

Ainsi, toute estimation de positivité de Q donnera une estimation sur $\|Pu\|_{L^2}^2$.

Rappelons d'abord que si $A = \text{Op}(a) \in \text{Op } S^{m_1}$ et $B = \text{Op}(b) \in \text{Op } S^{m_2}$, sont deux opérateurs pseudo-différentiels, alors $A^* \in \text{Op } S^{m_1}$ et $[A, B] \in \text{Op } S^{m_1+m_2-1}$. De plus

$$A^* \in \text{Op}(\bar{a}) + \text{Op } S^{m_1-1}, \quad [A, B] \in \text{Op} \left(\frac{1}{i} \{a, b\} \right) + \text{Op } S^{m_1+m_2-2}.$$

Donc $Q = \text{Op}(q)$ avec $q = q_1 + q_0$ où $q_1 \in S^1(\mathbb{R}^n)$, $q_0 \in S^0(\mathbb{R}^n)$ et

$$q_1 = \frac{1}{i} \{\bar{p}_1, p_1\}.$$

Par hypothèse on en déduit que $\text{Re } q_1 > c|\xi|$ si $|\xi| \geq R$. L'inégalité de Gårding implique que

$$\text{Re}(Qu, u) \geq \frac{1}{C} \|u\|_{H^{1/2}}^2 - C \|u\|_{L^2}^2.$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Chapitre 11

Equations hyperboliques

Nous allons nous intéresser à une classe particulière d'équations qui régissent les phénomènes de propagation. Il s'agit des équations hyperboliques.

11.1 Équations de transport

Soit $n \geq 1$ et $v \in \mathbb{R}^n$. L'équation de transport est le prototype d'une équation hyperbolique du premier ordre. C'est l'équation

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = 0$$

où l'inconnue $u = u(t, x)$ est une fonction à valeurs réelles de classe C^1 , définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Proposition 11.1. *Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Il existe une unique fonction $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ qui est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \nabla u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Cette solution est donnée par la formule $u(t, x) = u_0(x - tv)$.

Démonstration. L'idée est d'introduire une fonction $t \mapsto X(t)$ telle que, si u est solution de $\partial_t u + v \cdot \nabla u = 0$ alors $u(t, X(t))$ est une fonction constante. Ici, cela revient à introduire $X(t) = x + vt$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. En effet,

$$\frac{d}{dt} u(t, x + vt) = (\partial_t u + v \cdot \nabla u)(t, x + vt).$$

Donc si u est solution du problème de Cauchy alors $u(t, X(t)) = u(t, x + vt) = u(0, X(0)) = u(0, x) = u_0(x)$ d'où $u(t, x) = u_0(x - vt)$.

Réciproquement, on vérifie directement que $(t, x) \mapsto u_0(x - tv)$ est une fonction C^1 qui est solution du problème de Cauchy. \square

Dans le cas où le vecteur constant v est remplacé par une fonction à coefficients variables, on dispose encore d'une formule de représentation de la solution basée sur l'utilisation des courbes caractéristiques du champ de vecteurs. Comme nous n'allons pas utiliser ce point de vue, nous nous bornerons dans cette section à définir ces courbes et énoncer le résultat principal.

Commençons par rappeler le lemme de Gronwall. Ce lemme, très simple, joue un rôle fondamental dans l'étude des équations d'évolution.

Lemme 11.2 (Lemme de Gronwall). *Soient $A, B \geq 0$ et $b, \phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telles que*

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s) ds + \int_0^t b(s) ds$$

pour tout $t \geq 0$. Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\phi(t) \leq Ae^{Bt} + \int_0^t b(s)e^{B(t-s)} ds.$$

Démonstration. Introduisons

$$w(t) = A + B \int_0^t \phi(s) ds + \int_0^t b(s) ds.$$

Par hypothèse, cette fonction est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et $w'(t) = B\phi(t) + b(t) \leq Bw(t) + b(t)$. Donc

$$(w(t)e^{-Bt})' \leq b(t)e^{-Bt},$$

et on en déduit le résultat voulu en intégrant cette inégalité. \square

Soit $T > 0$ et $(t, x) \mapsto V(t, x) \in \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs défini pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \dots, n$ et vérifiant les hypothèses suivantes

$$(H1) \quad V \text{ et } \nabla_x V \text{ sont continues sur } [0, T] \times \mathbb{R}^n,$$

et il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$,

$$(H2) \quad |V(t, x)| \leq \kappa(1 + |x|).$$

Rappelons que l'on dit que γ est une courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t si $\gamma: s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = V(s, \gamma(s)), \quad \gamma(t) = x.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une telle courbe intégrale.

En utilisant le lemme de Gronwall, l'hypothèse (H2) permet de montrer que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0, T]$. Dans la suite on notera $s \mapsto X(s, t, x)$ cette courbe intégrale, qui est donc par définition solution de

$$\partial_s X(s, t, x) = V(s, X(s, t, x)), \quad X(t, t, x) = x.$$

L'identité principale énonce que pour tout $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, on a

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

Pour obtenir cette identité, notons que les applications $t_3 \mapsto X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x))$ et $t_3 \mapsto X(t_3, t_1, x)$ sont deux courbes intégrales de V passant par $X(t_2, t_1, x)$ pour $t_3 = t_2$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces applications coïncident sur leur intervalle maximal de définition.

Proposition 11.3. *Pour tout $(s, t) \in [0, T] \times [0, T]$ l'application*

$$X(s, t, \cdot): x \mapsto X(s, t, x)$$

est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur lui-même. De plus $X \in C^1([0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ et

$$\partial_t X(0, t, x) + \sum_{j=0}^d V_j(t, x) \partial_{x_j} X(0, t, x) = 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, la fonction définie par $u(t, x) = u_0(X(0, t, x))$ est C^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\partial_t u(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Si $\partial_t u + c \cdot \nabla u = 0$ et $u(0) = u_0$, on a vu que $u(t, x) = u_0(x - ct)$. On en déduit que toute les normes L^p de u_0 sont préservées par l'équation. Ce qui signifie que $\|u(t)\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. En particulier,

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}.$$

Nous allons voir comment démontrer une estimation analogue pour une équation à coefficients variables (sans utiliser le fait que l'on peut intégrer une telle équation par la méthode des caractéristiques).

Considérons maintenant $V \in C_b^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles et une solution régulière de l'équation

$$\partial_t u + V(t, x) \cdot \nabla u = 0.$$

En multipliant l'équation par u et en intégrant on obtient que

$$\frac{d}{dt} \int u(t, x)^2 dx = 2 \int u \partial_t u dx = -2 \int u(V \cdot \nabla u) dx$$

et en intégrant par parties on déduit que

$$\int u(V \cdot \nabla u) = -\frac{1}{2} \int (\operatorname{div} V) u^2 dx,$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \int |u(t, x)|^2 dx \leq \|\operatorname{div} V\|_{L^\infty} \int |u|^2 dx.$$

Le lemme de Gronwall donne alors

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq e^{Ct} \|u_0\|_{L^2}.$$

Remarquons que si $\operatorname{div} V = 0$ alors la norme $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ est conservée (ce qui est le cas pour l'équation d'Euler incompressible).

11.2 Equations hyperboliques pseudo-différentielles

On considère des symboles $a_t(x, \xi)$ dépendant d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$, à valeurs complexes. Dans toute la suite de ce chapitre $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ où $n \geq 1$ est un entier quelconque fixé.

Définition. • *Considérons un symbole $a = a(x, \xi)$ appartenant à $S^1(\mathbb{R}^n)$. On dit que a est hyperbolique si a peut s'écrire sous la forme $a = a_1 + a_0$ où $a_1 \in S^1(\mathbb{R}^n)$ est un symbole à valeurs imaginaires pures et a_0 appartient à $S^0(\mathbb{R}^n)$. Il est équivalent de dire que a est un symbole de $S^1(\mathbb{R}^n)$ dont la partie réelle appartient à $S^0(\mathbb{R}^n)$.*

• *Considérons une famille $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de symboles de $S^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $t \mapsto a_t$ est continue et bornée de \mathbb{R} dans $S^1(\mathbb{R}^n)$. On dit que $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un symbole d'ordre 1 dépendant du temps. Par définition, ce symbole est hyperbolique si $\operatorname{Re}(a_t)$ est bornée dans $S^0(\mathbb{R}^n)$.*

Exemple. L'exemple le plus simple d'un symbole hyperbolique est le suivant : $a(x, \xi) = i\xi$. Alors $\operatorname{Op}(a)u = \partial_x u$. Si $a_t(x, \xi) = iV(t, x)\xi$, alors $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un symbole hyperbolique et $\operatorname{Op}(a)u = V(t, x) \cdot \nabla u$.

Considérons un symbole $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ hyperbolique et une fonction u continue de \mathbb{R} dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Par définition, $\operatorname{Op}(a)u$ est donnée par $(\operatorname{Op}(a)u)(t) = \operatorname{Op}(a_t)u(t)$. Si $u \in C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^n))$ avec $s \in \mathbb{R}$, alors le théorème de continuité des Ψ DO sur les espaces de Sobolev entraîne que $\operatorname{Op}(a)u \in C^0(\mathbb{R}; H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$.

Donnons nous de plus :

- un temps $T > 0$ et un nombre réel s quelconques ;
- une fonction $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, appelée la donnée initiale ;
- une fonction $f \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$, appelée le terme source.

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(11.2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Op}(a)u = f, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

où l'inconnue est la fonction $u = u(t, x)$, la variable $t \in \mathbb{R}_+$ correspond au temps et la variable $x \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) correspond à la variable d'espace.

Théorème 11.4. *Soit $T > 0$, $n \geq 1$ et $s \in \mathbb{R}$. Pour toute donnée initiale $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$ il existe une unique fonction*

$$u \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$$

qui vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Op}(a)u = f$$

et qui est telle que $u(0) = u_0$.

Démonstration. Le premier ingrédient pour démontrer ce théorème est une estimation *a priori*.

Lemme 11.5. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Il existe une constante C telle que pour tout $u \in C^1([0, T]; H^s) \cap C^0([0, T]; H^{s+1})$, tout $f \in C^0([0, T]; H^s)$, tout $u_0 \in H^s$ et tout $t \in [0, T]$, si u est solution de (11.2.1) alors*

$$(11.2.2) \quad \|u(t)\|_{H^s} \leq e^{Ct} \|u_0\|_{H^s} + 2 \int_0^t e^{C(t-t')} \|f(t')\|_{H^s} dt'.$$

De plus il existe deux constantes K et N qui ne dépendent que de s telles que

$$C \leq K \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq N} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x, \xi} \left| \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \alpha_t(x, \xi) \right| \quad \text{avec } \alpha_t := (a_t^* - \bar{a}_t) + 2 \text{Re } a_t.$$

où a_t^* est le symbole de l'adjoint de $\text{Op}(a_t)$.

Démonstration. On commence par le cas $s = 0$. Comme u est C^1 à valeurs dans L^2 on peut écrire que

$$(11.2.3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 &= \frac{d}{dt} (u(t), u(t)) \\ &= 2 \text{Re} (\partial_t u(t), u(t)) \\ &= -2 \text{Re} (\text{Op}(a_t)u(t), u(t)) + 2 \text{Re} (f(t), u(t)). \end{aligned}$$

On a vu au chapitre précédent que l'adjoint $\text{Op}(a_t)^*$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole, noté a_t^* , est tel que $a_t^* = \bar{a}_t + b_t$ avec $b_t \in S^0(\mathbb{R}^n)$. On peut alors écrire

$$(\text{Op}(a_t)u(t), u(t)) = (u(t), \text{Op}(a_t)^*u(t)) = (u(t), \text{Op}(\bar{a}_t)u(t) + \text{Op}(b_t)u(t)).$$

L'hypothèse que (a_t) est hyperbolique signifie que $\bar{a}_t = -a_t + 2 \text{Re } a_t$ avec $\text{Re } a_t \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Donc $a_t^* = -a_t + \alpha_t$ où α_t appartient à $S^0(\mathbb{R}^n)$ (uniformément en t). On en déduit que

$$(\text{Op}(a_t)u(t), u(t)) = (u(t), -\text{Op}(a_t)u(t) + \text{Op}(\alpha_t)u(t)),$$

d'où

$$2 \text{Re} (\text{Op}(a_t)u(t), u(t)) = (u(t), \text{Op}(\alpha_t)u(t)).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de continuité des Ψ DO d'ordre 0 sur L^2 impliquent que

$$|(\text{Op}(\alpha_t)u(t), u(t))| \leq K \sup_t \|\text{Op}(\alpha_t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq C_0 \|u(t)\|_{L^2}^2$$

où C_0 est une constante qui ne dépend pas de t . En reportant cette inégalité dans (11.2.3) on conclut que

$$(11.2.4) \quad \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq C_0 \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2 \|f(t)\|_{L^2} \|u(t)\|_{L^2}.$$

On aimerait écrire que $\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = 2 \|u(t)\|_{L^2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}$ et simplifier l'inégalité en divisant par $\|u(t)\|_{L^2}$. Comme on ne sait pas encore que $\|u(t)\|_{L^2}$ ne peut pas s'annuler (sauf si u est identiquement nulle), on procède de la façon suivante : étant donné $\delta > 0$, on déduit de (11.2.4) que la fonction $y(t) = \sqrt{\|u(t)\|_{L^2}^2 + \delta}$ vérifie

$$\frac{d}{dt} y(t)^2 \leq C_0 y(t)^2 + 2 \|f(t)\|_{L^2} y(t),$$

et comme $\|u(t)\|_{L^2}^2 + \delta > 0$, la fonction $y(t)$ est C^1 et on peut simplifier

$$2 \frac{d}{dt} y(t) \leq C_0 y(t) + 2 \|f(t)\|_{L^2}.$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq y(t) \leq y(0) e^{C_0 t/2} + \int_0^t \|f(t')\|_{L^2} e^{C_0(t-t')/2} dt',$$

pour tout $\delta > 0$. En faisant tendre δ vers 0 on obtient que

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u(0)\|_{L^2} e^{C_0 t/2} + \int_0^t \|f(t')\|_{L^2} e^{C_0(t-t')/2} dt',$$

ce qui conclut la démonstration du lemme dans le cas $s = 0$.

Maintenant pour s quelconque on commute $L = \partial_t + \text{Op}(a)$ à $\Lambda_s = \langle D_x \rangle^s$, ce qui donne

$$\Lambda_s L u = \tilde{L} \Lambda_s u, \quad \tilde{L} = \partial_t + \tilde{A}, \quad \tilde{A} = \Lambda_s \text{Op}(a) \Lambda_{-s}.$$

Notons que \tilde{A} est un opérateur Ψ DO de symbole hyperbolique. On conclut la preuve en appliquant l'estimation L^2 à \tilde{L} . \square

Démontrons maintenant le théorème 11.4.

i) Vérifions l'unicité. Si u_1 et u_2 sont deux solutions différentes, alors la différence appartient à $C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$. On peut utiliser l'estimation d'énergie (11.2.2) appliquée avec s remplacé par $s - 1$, et on obtient que $u_1 = u_2$.

ii) Démontrons maintenant l'existence.

Nous allons commencer par démontrer l'existence d'une solution faible, au sens de la définition suivante.

Définition 11.6. Soit $s \in \mathbb{R}$. Considérons $u \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$. On dit que u est une solution au sens des distributions du problème de Cauchy (11.2.1) si et seulement si la propriété suivante est vérifiée. Pour toute fonction $\varphi = \varphi(t)$ appartenant à $C_0^\infty(]-\infty, T])$ et toute fonction $\psi = \psi(x)$ appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$-\int_0^T \varphi'(t) \langle u(t), \psi \rangle dt + \int_0^T \varphi(t) \langle \text{Op}(a_t) u(t), \psi \rangle dt = \int_0^T \varphi(t) \langle f(t), \psi \rangle dt + \varphi(0) \langle u_0, \psi \rangle.$$

Notons $L = \partial_t + \text{Op}(a)$ et $L^* = -\partial_t + \text{Op}(a)^*$. On considère l'espace \mathcal{T} des fonctions $v = v(t, x) \in \mathbb{R}$ qui sont C^∞ et de la forme $v(t, x) = \varphi(t)\psi(x)$ où $\text{supp } \varphi \Subset]-\infty, T[$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et on note E le sous-espace vectoriel $E = L^*(\mathcal{T})$.

Commençons par démontrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $v \in \mathcal{T}$,

$$(11.2.5) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{H^{-s}} \leq C \int_0^T \|L^* v(t)\|_{H^{-s}} dt.$$

Pour cela introduisons $\tilde{v}(t, x) = v(T - t, x)$ et remarquons que

$$(\partial_t + \text{Op}(a)^*) \tilde{v} = (L^* v)(T - t, x), \quad \tilde{v}(0, x) = 0.$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que $\text{Op}(a)^*$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole, noté a^* , vérifie $a^* - \bar{a} \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Alors $\text{Re } a^* - \text{Re } a \in S^0(\mathbb{R}^n)$ et on voit que a est hyperbolique si et seulement si a^* l'est. On peut donc appliquer l'inégalité (11.2.2) en remplaçant a par a^* . De plus, comme $\tilde{v}(0, x) = 0$, l'inégalité (11.2.5) est une conséquence de l'estimation *a priori* (11.2.2) appliquée avec s remplacé par $-s$

(notons que les hypothèses qui permettent d'utiliser l'estimation (11.2.2) sont vérifiées car $\tilde{v} \in C^1([0, T]; H^{-s}(\mathbb{R}^n))$).

Soit y un élément de E . Par définition, y peut s'écrire $y = L^*v$ avec $v \in \mathcal{T}$. De plus si $v' \in \mathcal{T}$ est tel que $y = L^*v'$, alors $L^*(v - v') = 0$. L'estimation (11.2.5) entraîne que $\tilde{v} = \tilde{v}'$ et donc $v = v'$. Nous avons démontré que pour tout y appartenant à E , il existe un unique $v \in \mathcal{T}$ tel que $y = L^*v$.

Soit $y = L^*v \in E$ avec $v \in \mathcal{T}$. On définit $\Psi(y)$ par

$$\Psi(y) = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + \langle u_0, v(0, \cdot) \rangle$$

On a

$$|\Psi(y)| \leq \left(\|u_0\|_{H^s} + \int_0^T \|f(t)\|_{H^s} dt \right) \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{H^{-s}}$$

et de plus l'estimation (11.2.5) implique que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{H^{-s}} \leq C \int_0^T \|L^*v\|_{H^{-s}} dt = C \int_0^T \|y\|_{H^{-s}} dt$$

donc

$$|\Psi(y)| \leq C \left(\|u_0\|_{H^s} + \int_0^T \|f(t)\|_{H^s} dt \right) \int_0^T \|y\|_{H^{-s}} dt.$$

$\Psi: E \rightarrow \mathbb{R}$ est donc une forme linéaire continue. Avec le théorème de Hahn-Banach on étend Ψ en une forme linéaire continue $\tilde{\Psi}$ définie sur $L^1([0, T]; H^{-s})$. Les formes linéaires continues sur $L^1([0, T]; H^{-s})$ se représentant par des fonctions de $L^\infty([0, T]; H^s)$, on a montré l'existence de $u \in L^\infty([0, T]; H^s)$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{T}, \quad \int_0^T \langle u(t), L^*v(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + \langle u_0, v(0) \rangle.$$

Le lemme suivant énonce que les solutions faibles sont en fait des solutions au sens classiques.

Lemme 11.7. *On a $u \in C^1([0, T]; H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$, de plus $u(0) = u_0$ et enfin on a l'égalité suivante entre fonctions de $C^0([0, T]; H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Op}(a)u = f.$$

Démonstration. Admis. □

Pour conclure nous allons régulariser f et u_0 , construire une suite de solutions régulières et passer à la limite. On introduit deux suites $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f^n \in C^0([0, T]; H^{s+2})$ et $u_0^n \in H^{s+2}$ qui converge vers f dans $C^0([0, T]; H^s)$ et vers u dans H^s , respectivement.

Le travail précédent donne une suite de solutions u^n appartenant à $C^1([0, T]; H^s)$. L'estimation d'énergie (11.2.2) montre alors que la suite des solutions aux problèmes approchés est de Cauchy dans $C([0, T]; H^s)$, donc converge vers $u \in C^0([0, T]; H^s)$ qui est la solution cherchée. \square

11.3 Régularisation de l'équation

Nous allons dans cette section montrer que la solution obtenue à la section précédente est la limite de solutions de problèmes approchés. Ce résultat peut être vu comme une autre façon de prouver l'existence d'une solution une fois que l'on a démontré une estimation *a priori* (rappelons que la démonstration de l'unicité est directe).

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons le problème de Cauchy

$$(11.3.1) \quad \partial_t u + \text{Op}(a)J_\varepsilon u = f, \quad u(0) = u_0$$

où J_ε , appelé multiplicateur de Friedrichs, est défini par

$$\widehat{J_\varepsilon v}(\xi) = \chi(\varepsilon\xi)\widehat{v}(\xi),$$

où χ est une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^n , à support dans la boule de centre 0 et de rayon 2, et valant 1 sur la boule de centre 0 et de rayon 1.

Théorème 11.8. *Soit $T > 0$ et $s \in \mathbb{R}$. Pour tout $u_0 \in H^s$ et tout $f \in C([0, T]; H^s)$, il existe une unique solution u_ε appartenant à $C^1([0, T]; H^s)$ du problème de Cauchy (11.3.1). De plus, pour tout $\sigma < s$, cette suite est de Cauchy dans $C([0, T]; H^\sigma) \cap C^1([0, T]; H^{\sigma-1})$ et converge dans cet espace vers l'unique solution $u \in C([0, T]; H^s) \cap C^1([0, T]; H^{s-1})$ du problème de Cauchy*

$$\partial_t u + \text{Op}(a)u = f, \quad u(0) = u_0.$$

Démonstration. On notera C plusieurs constantes (dont la valeur peut varier d'une expression à l'autre) qui ne dépendent que de T et de s .

La principale différence entre le problème de Cauchy (11.3.1) et le même problème sans l'opérateur J_ε est qu'il est très facile de montrer que le problème (11.3.1) admet une solution.

Lemme 11.9. *Pour tout $u_0 \in H^s$ et tout $f \in C([0, T]; H^s)$, il existe une unique solution u_ε appartenant à $C^1([0, T]; H^s)$ du problème de Cauchy (11.3.1).*

Démonstration. Nous avons déjà vu que si $a = a(x, \xi)$ et $b = b(\xi)$ (symbole indépendant de x) alors $\text{Op}(a) \circ \text{Op}(b) = \text{Op}(ab)$. On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\text{Op}(a)J_\varepsilon = \text{Op}(a^\varepsilon)$$

où

$$a_t^\varepsilon(x, \xi) = a_t(x, \xi)\chi(\varepsilon\xi).$$

Pour tout t et tout $\varepsilon > 0$, le symbole a_t^ε est à support compact en ξ et donc appartient à $S^{-\infty}$ et en particulier à $S^0(\mathbb{R}^n)$. Le théorème de continuité des opérateurs Ψ DO d'ordre 0 sur les Sobolev implique que $\text{Op}(a_t^\varepsilon)$ est un opérateur continu sur $H^s(\mathbb{R}^n)$. Alors l'équation $\partial_t u + \text{Op}(a^\varepsilon)u = f$ peut être vue comme une équation différentielle ordinaire, pour laquelle la méthode des itérations de Picard s'applique. \square

Dans la suite nous utilisons la notation $a_t^\varepsilon(x, \xi) = a_t(x, \xi)\chi(\varepsilon\xi)$.

Lemme 11.10. *Il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0, T]$, et toute fonction $v \in C^1([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$,*

$$\|v(t)\|_{H^s} \leq C \|v(0)\|_{H^s} + C \int_0^t \|(\partial_t v + \text{Op}(a^\varepsilon)v)(\tau)\|_{H^s} d\tau.$$

Démonstration. Remarquons que le symbole $a_t^\varepsilon(x, \xi) = a_t(x, \xi)\chi(\varepsilon\xi)$ est borné dans $S^1(\mathbb{R}^n)$ uniformément en ε , au sens où $\{a_t^\varepsilon : \varepsilon \in]0, 1], t \in [0, T]\}$ est une partie bornée de $S^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie que,

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^+ / \forall \varepsilon \in]0, 1], \forall t \in [0, T], \sup_{x, \xi} \langle \xi \rangle^{|\beta|-1} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_t^\varepsilon(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta}.$$

De plus $\text{Re } a_t^\varepsilon$ est uniformément borné dans $S^0(\mathbb{R}^n)$. L'inégalité voulue est donc une conséquence de (11.2.2). \square

En appliquant l'inégalité précédente à $v = u_\varepsilon$, on obtient qu'il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0, T]$,

$$(11.3.2) \quad \|u_\varepsilon\|_{C^0([0, T]; H^s)} \leq C \|u_0\|_{H^s} + C \int_0^T \|f(t)\|_{H^s} dt.$$

Ce qui implique que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, 1]}$ est une famille bornée dans $C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$. En utilisant l'équation, on vérifie que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, 1]}$ est une famille bornée dans $C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$. Notre but est de montrer que u_ε converge lorsque ε tend vers 0 vers une solution du problème de Cauchy. Pour cela nous allons montrer le lemme suivant.

Lemme 11.11. *La famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, 1]}$ est de Cauchy dans $C^0([0, T]; H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$.*

Démonstration. Soit ε et ε' dans $]0, 1]$. En partant de

$$\begin{aligned} \partial_t u_\varepsilon + \text{Op}(a)J_\varepsilon u_\varepsilon &= f, \\ \partial_t u_{\varepsilon'} + \text{Op}(a)J_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'} &= f, \end{aligned}$$

nous déduisons que $v = u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}$ vérifie

$$\partial_t v + \text{Op}(a^\varepsilon)v = f_\varepsilon \quad \text{avec} \quad f_\varepsilon = \text{Op}(a)(J_{\varepsilon'} - J_\varepsilon)u_{\varepsilon'}.$$

Comme u_ε et $u_{\varepsilon'}$ coïncident pour $t = 0$, on a $v(0) = 0$ et on peut alors utiliser l'inégalité du lemme précédent pour obtenir que

$$\|v\|_{C^0([0,T];H^{s-2})} \leq C \int_0^T \|f_\varepsilon(t)\|_{H^{s-2}} dt.$$

Or

$$\|f_\varepsilon(t)\|_{H^{s-2}} = \|\text{Op}(a)(J_{\varepsilon'} - J_\varepsilon)u_{\varepsilon'}(t)\|_{H^{s-2}} \leq K \|(J_{\varepsilon'} - J_\varepsilon)u_{\varepsilon'}(t)\|_{H^{s-1}}.$$

Par définition

$$\|(J_{\varepsilon'} - J_\varepsilon)u_{\varepsilon'}(t)\|_{H^{s-1}}^2 = (2\pi)^{-2n} \int \langle \xi \rangle^{2(s-2)} |\chi(\varepsilon\xi) - \chi(\varepsilon'\xi)|^2 |\widehat{u}_{\varepsilon'}(t, \xi)|^2 d\xi.$$

On utilise l'inégalité élémentaire $|\chi(\varepsilon\xi) - \chi(\varepsilon'\xi)| \leq K |\varepsilon - \varepsilon'| |\xi|$ pour conclure que

$$\int_0^T \|f_\varepsilon(t)\|_{H^{s-2}} dt \leq K' |\varepsilon - \varepsilon'| \int_0^T \|u_{\varepsilon'}(t)\|_{H^s} dt.$$

Comme $\|u_{\varepsilon'}\|_{C^0([0,T];H^s)}$ est uniformément bornée d'après (11.3.2), on obtient

$$\|v\|_{C^0([0,T];H^{s-2})} = O(|\varepsilon - \varepsilon'|),$$

ce qui est le résultat désiré. □

Lemme 11.12 (Interpolation dans les espaces de Sobolev). *Soit $s_1 < s_2$ deux nombres réels et $\sigma \in]s_1, s_2[$. écrivons σ sous la forme $\sigma = \alpha s_1 + (1 - \alpha)s_2$ avec $\alpha \in [0, 1]$. Il existe une constante $C(s_1, s_2)$ telle que pour tout $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$,*

$$(11.3.3) \quad \|u\|_{H^\sigma} \leq C(s_1, s_2) \|u\|_{H^{s_1}}^\alpha \|u\|_{H^{s_2}}^{1-\alpha}.$$

Démonstration. Ecrivons que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s}^2 &= (2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \langle \xi \rangle^{2\alpha s_1} |\widehat{u}(\xi)|^{2\alpha} \langle \xi \rangle^{2(1-\alpha)s_2} |\widehat{u}(\xi)|^{2(1-\alpha)} d\xi \end{aligned}$$

de sorte que l'inégalité voulue est une conséquence de l'inégalité d'Hölder. □

Nous avons vu que la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ est uniformément bornée dans $C^0([0, T]; H^s)$ et qu'elle est de plus de Cauchy dans $C^0([0, T]; H^{s-2})$. Etant donné $\sigma \in [s-2, s[$, l'inégalité (11.3.3), appliquée avec $(s_1, s_2, \sigma) = (s-2, s, \sigma)$, entraîne que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ est de Cauchy dans $C^0([0, T]; H^\sigma)$. En utilisant l'équation, on obtient de plus que $(\partial_t u_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ est de Cauchy

dans $C^1([0, T]; H^{\sigma-1})$. Donc u_ε converge dans $C^0([0, T]; H^\sigma) \cap C^1([0, T]; H^{\sigma-1})$ vers une limite notée u .

En passant à la limite, on trouve que u est solution du problème de Cauchy

$$\partial_t u + \text{Op}(a)u = f, \quad u(0) = u_0.$$

Pour conclure il reste juste à montrer que u appartient à $C^0([0, T]; H^s) \cap C^1([0, T]; H^{s-1})$. Nous avons vu à la fin de la section précédente comment montré que u appartient à $C^0([0, T]; H^s)$. On montre ensuite que $\partial_t u$ appartient à $C^0([0, T]; H^{s-1})$ en utilisant l'équation.

□

Chapitre 12

Singularités microlocales

Nous nous proposons dans ce chapitre de donner une introduction à l'analyse microlocale qui est l'étude des singularités des fonctions de plusieurs variables réelles.

12.1 Propriétés locales

Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ avec m un réel quelconque. Le théorème de continuité des opérateurs pseudo-différentiels implique que $\text{Op}(a)$ est continu de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ quelque soit $s \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\text{Op}(a)(C_0^\infty(\mathbb{R}^n)) \subset H^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$$

où la seconde inclusion provient du théorème d'injection de Sobolev. On peut se demander si on a mieux. Par exemple est-il vrai que $\text{Op}(a)u$ est une fonction à support compact ? Ce résultat est vrai, trivialement, si a est un polynôme en ξ (à coefficients dépendant de x). En effet, dans ce cas, $\text{Op}(a)$ est un opérateur différentiel et $\text{Op}(a)u$ est supportée dans $\text{supp } u$. Inversement, un résultat classique de calcul différentiel énonce que les opérateurs locaux (qui n'accroissent pas le support) sont forcément des opérateurs différentiels.

On dispose toutefois de plusieurs résultats concernant la théorie locale des opérateurs pseudo-différentiels et nous allons les décrire. Parmi ces résultats, le plus simple est donné par la proposition suivante.

Proposition 12.1. *Soit $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ une fonction à support compact. Considérons une fonction $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui s'annule sur un voisinage du support de u . Alors $\varphi \text{Op}(a)u$ est une fonction $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Considérons une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 sur le support de u et dont le support est inclus dans $\varphi^{-1}(\{0\})$.

Par définition des opérateurs pseudo-différentiels, si $a = a(x)$ ne dépend pas de ξ , et si $b = b(x, \xi)$ est un symbole quelconque, alors $\text{Op}(a) \circ \text{Op}(b)u = a(\text{Op}(b)u) = \text{Op}(ab)u$. Ici cela entraîne que $\varphi \text{Op}(a)u = \text{Op}(\varphi a)u$.

Par ailleurs, on a $u = \psi u$. Le théorème de composition implique que

$$\varphi \text{Op}(a)u = \text{Op}(\varphi a)\{\psi u\} = \text{Op}((\varphi a)\#\psi)u.$$

De plus

$$(\varphi a)\#\psi \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!} \varphi(\partial_{\xi}^{\alpha} a)(\partial_x^{\alpha} \psi).$$

Par hypothèse sur φ et ψ on a $\varphi(\partial_x^{\alpha} \psi) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ donc $(\varphi a)\#\psi \sim 0$. On en déduit que $\text{Op}((\varphi a)\#\psi)$ est un opérateur régularisant, borné de $H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ pour tout nombres réels s_1, s_2 . Ce qui conclut la démonstration. \square

Remarque 12.2. Le résultat reste vrai, avec la même démonstration, si on suppose seulement que u appartient à l'espace $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions à support compact. Pour le voir il suffit de savoir que tout élément u de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $s \in \mathbb{R}$.

Rappelons que

$$S^{+\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m(\mathbb{R}^n), \quad S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi $S^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de tous les symboles tandis que $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des symboles régularisants. On a bien sûr $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \subset S^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$.

On note

$$H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n), \quad H^{+\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n),$$

et on a cette fois $H^{+\infty}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

On a vu que si $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s \in \mathbb{R}$ alors $\text{Op}(a)u \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$. Si $m \leq 0$ alors $\text{Op}(a)u$ est plus régulier que u . En particulier

$$a \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n), u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \implies \text{Op}(a)u \in H^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 12.3. *Considérons un opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}(a)$ régularisant, tel que $a \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\text{Op}(a)$ est continu de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Soit $a \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, ce qui précède démontre que $\text{Op}(a)u$ appartient à $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et donc à $C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Puis on applique un raisonnement déjà rencontré et qui nous dit que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x^{\alpha} \text{Op}(a)u$ est

une combinaison linéaire de termes $\text{Op}(\partial_\xi^\delta a)(x^{\alpha-\delta}u)$, qui appartiennent à $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour les mêmes raisons ($\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation et par multiplication par une fonction lisse). Ainsi on conclut au fait que $\text{Op}(a)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

On rappelle la définition du support singulier d'une distribution.

Définition 12.4. *On dit qu'une distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^∞ au voisinage de x_0 , s'il existe un voisinage ω de x_0 tel que pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ on a $\varphi f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Le support singulier de f , noté $\text{supp sing } f$, est le complémentaire de l'ensemble des points au voisinage desquels f est C^∞ .

Cette notion permet de généraliser la proposition 12.1.

Proposition 12.5. *Pour tout $a \in S^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ et tout $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\text{supp sing Op}(a)u \subset \text{supp sing } u.$$

Démonstration. Soit $a \in S^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \text{supp sing } u$. Ainsi $\psi u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. De plus pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on peut trouver $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\psi = 1$ sur le support de φ (car $\text{dist}(\text{supp}(\varphi), \partial\Omega) > 0$), et

$$\varphi \text{Op}(a)u = \varphi \text{Op}(a)(\psi u) + \varphi \text{Op}(a)((1-\psi)u).$$

Le premier terme est dans \mathcal{S} puisque $\psi u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$, et le second terme peut s'écrire $\text{Op}(b)u$ où $b = \varphi a \# (1-\psi)$. Comme nous l'avons déjà vu, le symbole b vérifie $b \sim 0$ puisque $\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(1-\psi) = \emptyset$ par construction de ψ . Par ailleurs, si $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors on a aussi $(1-\psi)u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $\varphi \text{Op}(a)((1-\psi)u) \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$. Donc, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a $\varphi \text{Op}(a)u \in C_0^\infty(\Omega)$. On en déduit que $\text{Op}(a)u \in C^\infty(\Omega)$ (la régularité est une notion locale) ce qui est la propriété recherchée. \square

12.2 Front d'onde

Le front d'onde d'une distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, noté $\text{WF}(f)$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, qui décrit non seulement les points où f est singulière, mais encore les co-directions dans lesquelles celle-ci est singulière. Cet ensemble est défini par son complémentaire.

Définition 12.6. *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

i) On dit que f est microlocalement de classe C^∞ en un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ s'il existe un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^n$ contenant x_0 et un cône ouvert Γ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contenant ξ_0 tels que l'on ait

$$(12.2.1) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0 : \forall \xi \in \Gamma, \quad \left| \widehat{\varphi f}(\xi) \right| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}.$$

ii) L'ensemble des points (x_0, ξ_0) où f n'est pas microlocalement C^∞ est appelé le front d'onde de f et noté $\text{WF}(f)$.

Le front d'onde est un sous-ensemble conique de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, ce qui signifie que pour tout $t > 0$,

$$(x, \xi) \in \text{WF}(f) \iff (x, t\xi) \in \text{WF}(f).$$

Le front d'onde permet de préciser la notion de support singulier. En effet, on a la proposition suivante.

Proposition 12.7. *La projection sur \mathbb{R}^n de $\text{WF}(u)$ est $\text{supp sing}(u)$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à $\text{supp sing}(u)$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à support dans une boule suffisamment petite centrée en x_0 , alors φu est une fonction C^∞ à support compact et donc appartient à la classe de Schwartz. Comme la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on en déduit que $\widehat{\varphi u}$ est à décroissance rapide dans toutes les directions. En particulier, aucun (x_0, ξ_0) n'appartient à $\text{WF}(u)$.

Réciproquement, supposons que x_0 est tel qu'aucun (x_0, ξ_0) n'appartient à $\text{WF}(u)$. Pour chaque ξ_0 on peut trouver un ouvert ω contenant x_0 et un cône Γ contenant ξ_0 tels que (12.2.1) soit valide. Par compacité de la sphère, on peut trouver un nombre fini de tels couples (ω_j, Γ_j) de manière que les Γ_j recouvrent $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont le support est contenu dans $\bigcap_j \omega_j$ on en déduit que la fonction $\widehat{\varphi u}$ est à décroissance rapide, ce qui achève la démonstration. \square

Si P est un opérateur différentiel d'ordre m dont les coefficients p_α sont réels et C^∞ ,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \partial_x^\alpha.$$

Une question importante en EDP est de déterminer le front d'onde des solutions distributions de l'équation $Pf = 0$. Les résultats de base relient la géométrie de l'opérateur à la géométrie des singularités de ses solutions. Les deux objets géométriques les plus simples que l'on associe à l'EDP $P(f) = 0$ sont les suivants.

i) Le **symbole principal**

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

qui est un polynôme homogène de degré m en ξ .

ii) La **variété caractéristique** de P que l'on note $\text{Car}(P)$ et qui est le fermé (homogène en ξ) défini par

$$\text{Car}(P) = \{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) ; p_m(x, \xi) = 0 \}.$$

Le premier résultat important de la théorie est le suivant.

Théorème 12.8 (Sato-Hörmander). *Les singularités sont contenues dans la variété caractéristique. Si P est un opérateur différentiel à coefficients appartenant à $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,*

$$P(u) = 0 \implies \text{WF}(u) \subset \text{Car}(P).$$

Démonstration. Nous commençons par un lemme technique. Etant donné un opérateur différentiel Q et une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on cherche $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie, approximativement, l'équation

$$Q(\psi e^{ix \cdot \xi}) = \varphi e^{ix \cdot \xi}.$$

Résoudre approximativement signifie que nous aurons une erreur et que cette erreur est mesurée en fonction du paramètre naturel qui est la fréquence $|\xi|$ (ici $|\xi|$ est grand). Observons aussi que $e^{-ix \cdot \xi} Q(f e^{ix \cdot \xi}) = q_m(x, \xi) f + \dots$ où les pointillés cachent un polynôme en ξ de degré inférieur à $m-1$. Ainsi, en première approximation, on cherche $\psi_{\xi, N}$ comme une perturbation de $\frac{\varphi}{q_m(x, \xi)}$.

Lemme 12.9. *Considérons un opérateur différentiel $Q = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ d'ordre m et notons $q_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$ son symbole principal. Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $V \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un cône tels que*

$$\exists C > 0 / \forall (x, \xi) \in \omega \times V, \quad |q_m(x, \xi)| \geq C |\xi|^m.$$

Pour tout entier N , pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ et tout $\xi \in V$, il existe $\psi_{\xi, N} \in C_0^\infty(\omega)$ et $r_{\xi, N} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$Q\left(\frac{\psi_{\xi, N}(x)}{q_m(x, \xi)} e^{ix \cdot \xi}\right) = \varphi e^{ix \cdot \xi} + r_{\xi, N} e^{ix \cdot \xi}$$

avec $\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha r_{\xi, N}| \leq C_\alpha |\xi|^{-N}$.

Démonstration. Introduisons un opérateur R_ξ (qui dépend de ξ) en posant

$$Q\left(\frac{\psi}{q_m(x, \xi)} e^{ix \cdot \xi}\right) = (\psi + R_\xi(\psi)) e^{ix \cdot \xi}.$$

Il s'agit alors de résoudre, approximativement, l'équation $\psi + R_\xi(\psi) = \varphi$. Commençons par donner une expression de $R_\xi(\psi)$. Pour cela on calcule $e^{-ix \cdot \xi} Q\left(\frac{\psi}{q_m(x, \xi)} e^{ix \cdot \xi}\right)$ où $Q =$

$\sum_{\alpha} q_{\alpha}(x) D_x^{\alpha}$, directement avec la règle de Leibniz, en séparant l'expression en plusieurs termes : le premier terme correspond au cas où toutes les dérivées sont d'ordre $|\alpha| = m$ et agissent sur le facteur oscillant $e^{ix \cdot \xi}$ (la contribution de ce terme est ψ) ; la somme des autres termes correspond à $R_{\xi}(\psi)$, c'est la somme des termes pour lesquelles soit $|\alpha| \leq m - 1$ et toutes les dérivées agissent sur $e^{ix \cdot \xi}$, soit au moins une dérivée agit sur le facteur $\psi/q_m(x, \xi)$. On trouve

$$\begin{aligned} e^{-ix \cdot \xi} Q \left(\frac{\psi}{q_m(x, \xi)} e^{-ix \cdot \xi} \right) &= (I) + R_{\xi}(\psi) \quad \text{où} \\ (I) &= e^{-ix \cdot \xi} \sum_{|\alpha|=m} \frac{\psi}{q_m(x, \xi)} a_{\alpha}(x) \partial_x^{\alpha} (e^{ix \cdot \xi}), \\ R_{\xi}(\psi) &= e^{-ix \cdot \xi} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{\psi}{q_m(x, \xi)} a_{\alpha}(x) \partial_x^{\alpha} (e^{ix \cdot \xi}), \\ &\quad + e^{-ix \cdot \xi} \sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|>0} a_{\alpha}(x) \partial_x^{\beta} \left(\frac{\psi}{q_m(x, \xi)} \right) \partial_x^{\gamma} e^{ix \cdot \xi}. \end{aligned}$$

Alors $(I) = \psi$ car

$$\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(x) \partial_x^{\alpha} (e^{ix \cdot \xi}) = q_m(x, \xi) e^{ix \cdot \xi},$$

par définition de q_m .

Posons

$$\psi_{\xi, N} := \sum_{n=0}^{N-1} (-R_{\xi})^n(\varphi), \quad r_{\xi, N} = (-1)^{N+1} R_{\xi}^N(\varphi).$$

Alors $\psi_{\xi, N} + R_{\xi}(\psi_{\xi, N}) = \varphi + r_{\xi, N}$ et on vérifie que $r_{\xi, N}$ vérifie les propriétés voulues. \square

Démontrons maintenant le théorème. Soit $(x_0, \xi_0) \notin \text{Car}(P)$. Considérons un ouvert ω de \mathbb{R}^n et un cône $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que

$$\exists C > 0 \ / (x, \xi) \in \omega \times \Gamma \Rightarrow |p_m(x, \xi)| \geq C |\xi|^m.$$

Alors, avec $Q = {}^t P$ et $V = -\Gamma$, on a

$$\exists C > 0 \ / \forall (x, \xi) \in \omega \times V, \quad |q_m(x, -\xi)| \geq C |\xi|^m.$$

Fixons une fonction $\varphi \in C_0^{\infty}(\omega)$. Pour montrer que $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u)$, nous allons estimer $\widehat{\varphi u}(\xi)$. Le lemme précédent implique que, pour tout entier N et tout $\xi \in V$, il existe $\psi_{\xi, N} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $r_{\xi, N}$ telles que

$${}^t P \left(\frac{\psi_{\xi, N}}{q_m} e^{-ix \cdot \xi} \right) = \varphi e^{-ix \cdot \xi} + r_{\xi, N} e^{-ix \cdot \xi}$$

avec $\sup |\partial_x^{\alpha} r_{\xi, N}| = O(|\xi|^{-N})$.

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi u}(\xi) &= \langle u, \varphi e^{-ix \cdot \xi} \rangle = \langle u, {}^t P((\psi_{\xi, N}/q_m) e^{-ix \cdot \xi}) - r_{\xi, N} e^{-ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \langle Pu, (\psi_{\xi, N}/q_m) e^{-ix \cdot \xi} \rangle - \langle u, r_{\xi, N} e^{-ix \cdot \xi} \rangle \\ &= -\langle u, r_{\xi, N} e^{-ix \cdot \xi} \rangle,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $Pu = 0$.

Rappelons que par définition des distributions tempérées, il existe un entier p et une constante C tels que

$$\forall \kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad |\langle u, \kappa \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha|+|\beta| \leq p} |x^\alpha \partial_x^\beta \kappa(x)|,$$

où C_K^∞ est l'espace des fonctions C^∞ à support dans K .

Comme $r_{\xi, N}$ est une fonction C^∞ à support dans ω , il existe un entier M qui ne dépend que de ω tel que, pour tout $\xi \in \Gamma$,

$$|\langle u, r_{\xi, N} e^{-ix \cdot \xi} \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sup |\partial_x^\alpha (r_{\xi, N} e^{-ix \cdot \xi})|$$

mais $\sup |\partial_x^\alpha (r_{\xi, N} e^{-ix \cdot \xi})| = O(|\xi|^{|\alpha|-N})$ donc $|\langle u, r_{\xi, N} e^{-ix \cdot \xi} \rangle| \leq C_N \langle \xi \rangle^{M-N}$. (La constante C_N dépend de ω et de φ , mais ceci ne pose aucun problème.) En prenant N assez grand, on conclut la démonstration. \square

12.3 Théorème de propagation des singularités

Le théorème de propagation des singularités dit que non seulement le front d'onde (les singularités) de la fonction est contenu dans la variété caractéristique, mais en plus c'est forcément une réunion de trajectoires pour un système dynamique naturel.

Définition 12.10. *Considérons une fonction $b = b(x, \xi) \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$ à valeurs réelles. On note $H_b: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ le champ de vecteurs défini par*

$$(12.3.1) \quad H_b(x, \xi) = \left(\frac{\partial b}{\partial \xi_1}(x, \xi), \dots, \frac{\partial b}{\partial \xi_n}(x, \xi), -\frac{\partial b}{\partial x_1}(x, \xi), \dots, -\frac{\partial b}{\partial x_n}(x, \xi) \right).$$

On dit que H_b est le champ hamiltonien de b . Ses courbes intégrales sont appelées des bicaractéristiques. Pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $t \mapsto \Phi_{H_b}^t(x, \xi) = (x(t), \xi(t))$ l'unique solution maximale du système

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial b}{\partial \xi}(x(t), \xi(t)), & \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial b}{\partial x}(x(t), \xi(t)), \\ x(0) &= x, & \xi(0) &= \xi.\end{aligned}$$

Remarque 12.11. On utilise aussi la notation

$$H_b = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial b}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right),$$

pour désigner le champ de vecteurs donné par (12.3.1).

Proposition 12.12. *Supposons que b est un symbole à valeurs réelles avec $b \in S^1(\mathbb{R}^n)$. Alors le flot $\Phi_{H_b}^t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est défini pour $t \in \mathbb{R}$. De plus, si $p \in S^0(\mathbb{R}^n)$, alors $p(\Phi_{H_b}^t(x, \xi))$ défini un symbole qui appartient à $S^0(\mathbb{R}^n)$ uniformément en t .*

Démonstration. Admis. □

Considérons un symbole $a \in S^1(\mathbb{R}^n)$. On suppose que a peut s'écrire sous la forme $a^1 + a^0$ où

1. $a^0 \in S^0(\mathbb{R}^n)$;
2. a^1 est un symbole à valeurs imaginaires pures et homogène en ξ d'ordre 1.

Par exemple, $a(x, \xi) = iV(x)\xi$ avec $V \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction à valeurs réelles.

Nous avons montré au chapitre précédent comment résoudre le problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Op}(a)u = 0.$$

On note $S(t, s) = e^{(s-t)\text{Op}(a)} : L^2 \rightarrow L^2$ l'opérateur solution qui à une fonction $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ donnée associe la valeur au temps t de l'unique solution du problème de Cauchy qui vaut u_0 au temps s . C'est-à-dire : $u(t) = S(t, s)u_0$ est l'unique fonction $u \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Op}(a)u = 0, \quad u(s) = u_0.$$

Théorème 12.13. *Soit $P_0 = \text{Op}(p_0) \in \text{Op} S^0(\mathbb{R}^n)$ un opérateur pseudo-différentiel. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, modulo un opérateur régularisant, $S(t, 0)P_0S(0, t)$ est un opérateur pseudo-différentiel : il existe un symbole $q_t \in S^0(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$,*

$$S(t, 0)P_0S(0, t)u_0 - \text{Op}(q_t)u_0 \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^n).$$

De plus

$$q_t(x, \xi) - p_0(\Phi_H^{-t}(x, \xi)) \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$$

où Φ_H^t est le flot associé au champ de vecteurs

$$H = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a^1}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial a^1}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

Démonstration. En dérivant par rapport à t nous trouvons que $P(t) = S(t, 0)P_0S(0, t)$ vérifie

$$P'(t) + [\text{Op}(a), P(t)] = 0, \quad P(0) = P_0.$$

Nous allons construire une solution approchée $Q(t)$ de cette équation puis montrer que $P(t) - Q(t)$ est un opérateur régularisant. On cherche donc $Q(t) = \text{Op}(q_t)$ avec $q \in \text{Op}(S^0(\mathbb{R}^n))$ solution de

$$Q'(t) + [\text{Op}(a_t), Q(t)] = R(t), \quad Q(0) = P_0,$$

où $R(t)$ est une famille d'opérateurs régularisants. On va construire q de la forme

$$q(t, x, \xi) \sim q^{(0)}(t, x, \xi) + q^{(-1)}(t, x, \xi) + \dots$$

où $q^{(-k)}$ est un symbole d'ordre $-k$. Alors le symbole de $[\text{Op}(a_t), Q(t)]$ est de la forme

$$(12.3.2) \quad Hq + \frac{1}{i}\{\text{Op}(a^0), q\} + \sum_{|\alpha| \geq 2} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!} [(\partial_\xi^\alpha a)(\partial_x^\alpha q) - (\partial_\xi^\alpha q)(\partial_x^\alpha a)].$$

Cela suggère de définir $q^{(0)}$ par

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H\right)q^{(0)}(t, x, \xi) = 0, \quad q^{(0)}(0, x, \xi) = p_0(x, \xi).$$

Ainsi $q^{(0)}(t, x, \xi) = p_0(\Phi_H^{-t}(x, \xi))$, le symbole donné par l'énoncé du théorème. On a $q^{(0)}(t, x, \xi) \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Par récurrence on résout

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H\right)q^{(-j)}(t, x, \xi) = b^{(-j)}(t, x, \xi), \quad q^{(-j)}(0, x, \xi) = 0,$$

où b^{-j} est déterminé par récurrence, de manière à obtenir une solution de (12.3.2).

Finalement, il reste à démontrer que $P(t) - Q(t)$ est un opérateur régularisant. De façon équivalente, nous allons montrer que $v(t) - w(t) = S(t, 0)P_0f - Q(t)S(t, 0)f \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Notons que

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{Op}(a)v = 0, \quad v(0) = P_0f,$$

alors que

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{Op}(a)w = g, \quad w(0) = P_0f,$$

avec $g = R(t)S(t, 0)w \in C^0(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n))$. En prenant la différence des deux équations on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t}(v - w) + \text{Op}(a)(v - w) = -g, \quad v(0) - w(0) = 0.$$

Alors le théorème sur la résolution des équations hyperboliques entraîne que $v(t) - w(t) \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout t et tout $f \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui complète la démonstration. \square

On peut maintenant calculer l'action de l'opérateur solution $\exp(t \text{Op}(a))$ sur le front d'onde de la donnée initiale.

Théorème 12.14. *Si u vérifie*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Op}(a)u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0$$

avec $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in C^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ et, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\text{WF}(u(t, \cdot)) = \Phi_H^t(\text{WF}(u_0)).$$

Démonstration. Supposons que $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u_0)$. Alors il existe $p_0(x, \xi)$ tel que $p_0(x_0, \xi_0) \neq 0$ et $\text{Op}(p_0)u_0 \in C_0^\infty$. En utilisant l'opérateur Q introduit dans la preuve du théorème précédent on obtient que

$$(\partial_t + \text{Op}(a))Qu = Ru \in C^0([0, T]; H^\infty), \quad Qu|_{t=0} \in C_0^\infty.$$

On en déduit que $Q(t)u(t)$ est C^∞ et donc $\Phi_H^t(x_0, \xi_0) \notin \text{WF} u(t, \cdot)$. Comme on peut renverser le sens du temps, on trouve le résultat désiré. \square

12.4 Calcul paradifférentiel

Dans cette section nous présentons le calcul paradifférentiel introduit par Jean-Michel Bony pour étudier les singularités des équations aux dérivées partielles non linéaires, de la forme

$$F((\partial_x^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}) = 0.$$

On ne sait pas décrire pour une équation aussi générale l'ensemble des points où la fonction n'est pas microlocalement C^∞ . En particulier on ne connaît pas d'analogue du résultat (10.1.1) précédent. En revanche, grâce au calcul paradifférentiel, on peut dire des choses si l'on remplace C^∞ par un espace de fonctions à régularité limitée (par exemple H^r avec $r < +\infty$). Pour cela nous utiliserons la définition suivante. On dit que u est microlocalement H^r en (x_0, ξ_0) si il existe un symbole $\varphi = \varphi(x, \xi)$ homogène d'ordre 0 en ξ , vérifiant $\varphi(x_0, \xi_0) \neq 0$, tel que $\text{Op}(\varphi)u \in H^r$.

Théorème 12.15. *Soit $n, m \geq 1$ et $s_0 = n/2 + m$. Considérons une solution $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > s_0$ de*

$$(12.4.1) \quad F((\partial_x^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}) = 0.$$

Introduisons le symbole

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial f_\alpha}((\partial_x^\alpha f(x))_{|\alpha| \leq m})(i\xi)^\alpha.$$

En tout point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tel que $p_m(x_0, \xi_0) \neq 0$, f est microlocalement deux fois plus régulière : elle est microlocalement de classe H^t pour tout $t < 2s - s_0$.

Dans l'énoncé précédent, le symbole p_m dépend de l'inconnue f et on est amené à travailler avec des symboles de régularité limitée.

Définition 12.16. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. La classe des symboles d'ordre m et de régularité C^k en x , notée $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^n)$, est l'ensemble des fonctions $a = a(x, \xi)$ telles que, pour tous multi-indices β dans \mathbb{N}^n , il existe une constante C_β telle que

$$\|\partial_\xi^\beta a(\cdot, \xi)\|_{C^k} \leq C_\beta (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}.$$

La quantification para-différentielle de Bony associe à un symbole a l'opérateur T_a défini par

$$\widehat{T_a u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \chi(\xi - \eta, \eta) \widehat{a}(\xi - \eta, \eta) \psi(\eta) \widehat{u}(\eta) d\eta,$$

où $\widehat{a}(\theta, \xi) = \int e^{-ix \cdot \theta} a(x, \xi) dx$, et les fonctions de troncature ψ et χ vérifient

$$\psi(\eta) = 0 \quad \text{pour } |\eta| \leq 1, \quad \psi(\eta) = 1 \quad \text{pour } |\eta| \geq 2,$$

et, pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ assez petits,

$$\chi(\theta, \eta) = 1 \quad \text{si } |\theta| \leq \varepsilon_1 |\eta|, \quad \chi(\theta, \eta) = 0 \quad \text{si } |\theta| \geq \varepsilon_2 |\eta|.$$

Le point central dans la démonstration du théorème précédent est de montrer que si f vérifie l'équation (12.4.1) alors

$$T_{p_m} f \in H^t(\mathbb{R}^n),$$

qui est une équation paradifférentielle. On dit que l'on a paralinéariser (12.4.1).

Quatrième partie

Analyse des équations aux dérivées partielles

Chapitre 13

Le problème de Calderón

13.1 Introduction

Nous allons voir dans ce chapitre comment appliquer plusieurs des résultats précédents pour résoudre un problème posé par Calderón.

Étant donné Ω un ouvert C^∞ borné, une fonction $V \in L^\infty(\Omega)$ telle que $V \geq 0$ et une fonction $f \in H^1(\Omega)$, nous nous intéressons au problème suivant, d'inconnue la fonction $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution u appartenant à $H^1(\Omega)$. Un opérateur très important dans les applications est l'opérateur de Dirichlet-Neumann, défini par

$$\Lambda_V(f) = \partial_n u \big|_{\partial\Omega}.$$

Sylvester et Uhlmann ont démontré qu'en dimension $n \geq 3$, l'opérateur Λ_V détermine le potentiel V . Précisément, leur résultat énonce que l'application $V \mapsto \Lambda_V$ est injective. Ce théorème répond à une question posée par Calderón et est au coeur de préoccupations actuelles dans l'étude des problèmes inverses.

Nous avons deux objectifs bien distincts dans ce chapitre. Le premier est de démontrer ce résultat, qui est un très beau résultat. Le second est de proposer des illustrations originales des méthodes introduites dans les parties précédentes.

La méthode de démonstration de Sylvester et Uhlmann suit une idée surprenante introduite par Calderón. Elle consiste à travailler avec des fonctions harmoniques (solutions de $\Delta u = 0$), de la forme $x \mapsto \exp(\zeta \cdot x)$ où $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ est tel que $\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2 = 0$. Calderón avait montré, grâce à ces fonctions, que l'espace vectoriel engendré par les pro-

duits de fonctions harmoniques est dense dans L^2 . Ce résultat, assez frappant, admet une très jolie démonstration qui nous permettra d'appliquer le théorème d'unicité de Fourier.

Nous verrons ensuite la construction de Sylvester et Uhlmann de fonctions qui jouent un rôle analogue dans le cas où l'équation $\Delta u = 0$ est remplacée par $-\Delta u + Vu = 0$. La différence fondamentale est qu'il s'agit d'une équation à coefficients variables. Un des objectifs de ce chapitre est justement de montrer comment aborder un problème à coefficients variables en utilisant la notion de solutions approchées. La démonstration donnée par Sylvester et Uhlmann comportait un passage assez technique qui a été simplifié par Hahner. Nous suivrons sa démonstration, très élégante qui nous permettra de donner une illustration originale de la décomposition sur une base hilbertienne.

Enfin, dans la dernière partie, nous expliquerons formellement comment ces constructions permettent de démontrer l'injectivité de $V \mapsto \Lambda_V$.

13.2 Densité des produits de fonctions harmoniques

Dans ce chapitre on considère principalement des fonctions à valeurs réelles. Lorsqu'on considèrera des espaces de fonctions à valeurs complexes, on l'indiquera explicitement (en utilisant la notation $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ par exemple).

Théorème 13.1 (Calderón). *L'espace vectoriel engendré par les produits de fonctions harmoniques est dense dans $L^2(\Omega)$. De même l'espace vectoriel engendré par les produits scalaires de gradients de fonctions harmoniques est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. Les deux résultats se démontrent de façon analogue et on ne considèrera que le cas de produits scalaires de gradients de fonctions harmoniques. Introduisons

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \Delta u = 0\} \\ \Pi &= \{\nabla u \cdot \nabla v : (u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}\} \\ X &= \text{Vect } \Pi.\end{aligned}$$

On veut montrer que si $\varphi \in L^2(\Omega)$ et $\int_{\Omega} \varphi f \, dx = 0$ pour tout $f \in X$ alors $\varphi = 0$. Ce qui entraînera que $X^\perp = \{0\}$, d'où le fait que X est dense dans $L^2(\Omega)$ par un résultat déjà vu sur les espaces de Hilbert.

Considérons l'ensemble

$$A := \{\rho \in \mathbb{C}^n : \rho \cdot \rho = \rho_1^2 + \cdots + \rho_n^2 = 0\}.$$

Notons que

$$\begin{aligned}\rho \in A &\iff |\operatorname{Re} \rho|^2 - |\operatorname{Im} \rho|^2 + 2i \operatorname{Re} \rho \cdot \operatorname{Im} \rho = 0 \\ &\iff |\operatorname{Re} \rho| = |\operatorname{Im} \rho|, \quad \operatorname{Re} \rho \cdot \operatorname{Im} \rho = 0.\end{aligned}$$

L'observation essentielle est que si $\rho \in A$, alors $u_1(x) = e^{ix \cdot \rho}$, $u_2 = e^{ix \cdot \bar{\rho}}$ sont des fonctions harmoniques. En effet, $\nabla u_1 = i\rho e^{ix \cdot \rho}$ d'où $\Delta u_1 = -(\rho \cdot \rho)e^{ix \cdot \rho} = 0$ et de même $\Delta u_2 = 0$. Nous allons utiliser ces remarques avec ρ choisi de la façon suivante : on se donne $\eta \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}^n$ tels que $\eta \cdot k = 0$ et $|\eta| = |k|$. Alors $\rho = -i\eta + k$ vérifie $\rho \cdot \rho = 0$.

Considérons $\varphi \in L^2(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \varphi f \, dx = 0$ pour tout $f \in X$. Il faut faire attention ici au fait que X est un espace de fonctions à valeurs réelles alors que les exponentielles $u(x) = e^{ix \cdot \rho}$, $v = e^{ix \cdot \bar{\rho}}$ sont à valeurs complexes. Mais on vérifie directement que si $\Delta u = 0$, alors $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont des fonctions harmoniques. Par conséquent, l'hypothèse sur φ entraîne que $\int_{\Omega} \varphi f \, dx = 0$ pour tout f dans l'ensemble

$$\left\{ \nabla \operatorname{Re} u_1 \cdot \nabla \operatorname{Re} u_2, \nabla \operatorname{Re} u_1 \cdot \nabla \operatorname{Im} u_2, \nabla \operatorname{Im} u_1 \cdot \nabla \operatorname{Re} u_2, \nabla \operatorname{Im} u_1 \cdot \nabla \operatorname{Im} u_2 \right\}.$$

On en déduit que

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx = 0.$$

En utilisant la définition de $\rho = -i\eta + k$ et le fait que $|\eta| = |k|$, on en déduit que

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\Omega} \varphi(x) \rho \cdot (-\bar{\rho}) e^{ix \cdot \rho} e^{ix \cdot \bar{\rho}} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) (-2|k|^2) e^{ix \cdot (-i\eta + k) + ix \cdot (i\eta + k)} \, dx \\ &= \int_{\Omega} -2|k|^2 \varphi(x) e^{2ix \cdot k} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} -2|k|^2 (\chi_{\Omega} \varphi)(x) e^{2ix \cdot k} \, dx,\end{aligned}$$

où χ_{Ω} est la fonction indicatrice de Ω . La fonction $\chi_{\Omega} \varphi$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et donc sa transformée de Fourier $\widehat{\chi_{\Omega} \varphi}$ est une fonction continue. Le calcul précédent implique que $\widehat{\chi_{\Omega} \varphi} = 0$. Pour conclure la démonstration il ne reste plus qu'à observer que $\varphi = 0$ d'après le théorème d'unicité de la transformée de Fourier, dont nous rappelons ici l'énoncé : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\int e^{-i\xi \cdot x} f(x) \, dx = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, alors $f = 0$. \square

13.3 Equations à coefficients variables

La preuve du théorème 13.1 repose sur l'utilisation des exponentielles $e^{ix \cdot \rho}$ avec

$$\rho \in A := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta \cdot \zeta = 0\}.$$

Ces exponentielles sont des exemples de fonctions harmoniques et nous nous proposons d'étudier l'existence de fonctions similaires pour des équations à coefficients variables. Considérons une fonction $V \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et un opérateur P défini par ¹

$$Pu = -\Delta u + Vu.$$

La fonction $e^{ix \cdot \rho}$ avec $\rho \in A$ n'est pas dans le noyau de P si $V \neq 0$, mais nous allons voir que l'on peut trouver une **solution approchée** de l'équation $(-\Delta + V)u = 0$ de la forme

$$u(x) = e^{i\rho \cdot x}(1 + r(x))$$

où r est un terme correctif qui sera petit (de taille $O(|\rho|^{-1})$) pour une certaine norme. L'idée de chercher une solution approchée plutôt que de chercher une solution exacte est une idée essentielle pour étudier un problème à coefficients variables (et encore plus un problème non linéaire).

Une autre idée essentielle est de relaxer le problème en cherchant une **solution généralisée**. Nous n'allons pas chercher une solution de l'équation $-\Delta u + Vu = 0$ au sens classique. Nous allons chercher une solution au sens dit faible (voir la définition 6.3). Soit $u \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$ et $V \in L^\infty(\Omega)$. Alors la fonction $f = Vu$ vérifie $f \in L^2(\Omega)$ et donc $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On peut déduire de la définition 6.3 que u est une solution faible de l'équation $-\Delta u + Vu = 0$ si et seulement si

$$\forall \phi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{C}), \quad \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega} (\partial_i u)(\partial_i \phi) dx + \int_{\Omega} Vu\phi dx = 0.$$

Nous allons chercher une solution faible de l'équation $-\Delta u + Vu = 0$ de la forme

$$u = e^{i\rho \cdot x}(1 + r(x)),$$

avec r dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.

Proposition 13.2. *Soit $V \in L^\infty(\Omega)$. Il existe une constante C_0 qui ne dépend que de Ω et de n telle que, pour tout*

$$\rho \in A = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta \cdot \zeta = 0\}$$

vérifiant $|\rho| = \sqrt{\rho \cdot \bar{\rho}} \geq \max(C_0 \|V\|_{L^\infty}, 1)$, et pour tout $F \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$, l'équation

$$(-\Delta + V)u = 0$$

1. La terminologie, issue de la Mécanique Quantique, est la suivante : on dit que V est un potentiel et on appelle P l'opérateur de Schrödinger associé au potentiel V . On note simplement $P = -\Delta + V$ en identifiant la fonction V avec l'opérateur de multiplication par la fonction V .

a une solution faible u de la forme $u(x) = e^{i\rho \cdot x}(1 + r(x))$ où r appartient à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega, \mathbb{C})$ et vérifie

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2} &\leq \frac{C_0}{|\rho|} \|F\|_{L^2}, \\ \|\nabla r\|_{L^2} &\leq C_0 \|F\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration, assez longue, est décomposée en plusieurs étapes.

Étape 1 : conjugaison.

Il est commode de conjuguer l'équation par $e^{i\rho \cdot x}$. Pour faire ce calcul, on écrit formellement² que

$$\begin{aligned} (-\Delta + V)\{e^{i\rho \cdot x}(1 + r)\} = 0 &\Leftrightarrow e^{-i\rho \cdot x}(-\Delta + V)\{e^{i\rho \cdot x}(1 + r)\} = 0 \\ (13.3.1) \quad &\Leftrightarrow (-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)(1 + r) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)r = -V. \end{aligned}$$

Notons que si $r \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$ et $V \in L^\infty(\Omega)$, alors $-2i\rho \cdot \nabla r + Vr + V$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{C})$. Par conséquent, la définition 6.3 implique que r est une solution faible de $(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)r = -V$ si et seulement si

$$\forall \phi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{C}), \quad \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega} (\partial_i r)(\partial_i \phi) dx + \int_{\Omega} (-2i\rho \cdot \nabla r + Vr)\phi dx + \int_{\Omega} V\phi dx = 0.$$

Le lemme suivant énonce que le calcul formel (13.3.1) a un sens pour les solutions faibles (la démonstration est laissée au lecteur).

Lemme 13.3. *Soit $r \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$. Alors $u = e^{i\rho \cdot x}(1 + r)$ appartient à $H^1(\Omega, \mathbb{C})$ et u est une solution faible de $(-\Delta + V)u = 0$ si et seulement si r est une solution faible de l'équation $(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)r = -V$.*

D'après le lemme précédent, il nous suffit de montrer qu'il existe une constante C_0 qui ne dépend que de Ω et de n telle que, pour tout $\rho \in A$ vérifiant $|\rho| \geq \max(C_0 \|V\|_{L^\infty}, 1)$, et pour tout $F \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$, l'équation

$$(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)r = F,$$

a une solution faible $r \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$ satisfaisant

$$\begin{aligned} (13.3.2) \quad \|r\|_{L^2} &\leq \frac{C_0}{|\rho|} \|F\|_{L^2}, \\ \|\nabla r\|_{L^2} &\leq C_0 \|F\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

2. C'est-à-dire en calculant comme si les fonctions étaient régulières, sans se préoccuper du fait qu'on manipule en fait des solutions faibles.

Étape 2 : résolubilité de l'EDP conjugué dans le cas $V = 0$.

On souhaite trouver une solution faible $r \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$ de l'équation

$$(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla)r = F,$$

vérifiant les estimations (13.3.2).

Lemme 13.4. *Pour tout $\rho \in A$ il existe un opérateur borné $Q_\rho: L^2(\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\Omega, \mathbb{C})$ tel que*

$$(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla)Q_\rho = I$$

et vérifiant, pour tout $F \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \|Q_\rho F\|_{L^2} &\leq \frac{C_0}{|\rho|} \|F\|_{L^2}, \\ \|\nabla Q_\rho F\|_{L^2} &\leq C_0 \|F\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

où C_0 est une constante qui ne dépend que de Ω et de n .

Démonstration. Nous allons suivre une démonstration très astucieuse de ce résultat qui est due à Hähner. Écrivons $\rho = s(\omega_1 + i\omega_2)$ avec $s = |\rho|/\sqrt{2}$ et ω_1, ω_2 sont des vecteurs de \mathbb{R}^n orthogonaux. On peut sans perte de généralité supposer que $\omega_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et $\omega_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ sont les deux premiers vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . On peut également supposer que Ω est inclus dans le cube $\Pi = [-\pi, \pi]^n$. Étendons F par 0 dans Π . On se ramène à résoudre l'équation

$$(-\Delta - 2is(\partial_1 + i\partial_2))r = F \quad \text{dans } \Pi.$$

L'idée, astucieuse, est d'introduire une base hilbertienne bien choisie³.

Introduisons

$$e_k(x) = \exp\left(i\left(k + \frac{1}{2}\omega_2\right) \cdot x\right) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

On vérifie directement que

$$(e_k, e_l) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Pi} e_k(x) \overline{e_l(x)} \, dx = \delta_k^l,$$

3. Rappelons un résultat vu au chapitre 3.

Théorème 13.5. *Considérons un espace de Hilbert H et une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $(e_n, e_m) = 1$ si $n = m$ et 0 sinon. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) Si $f \in H$ vérifie $(f, e_n) = 0$ pour tout n dans \mathbb{N} , alors $f = 0$;
- (ii) pour tout $f \in H$, la série $\sum (f, e_n)e_n$ converge vers f et $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(f, e_n)|^2$.

donc $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ est une famille orthonormale de $L^2(\Pi, \mathbb{C})$ pour le produit scalaire précédent (produit scalaire usuel sur $L^2(\Pi)$, normalisé par la mesure de Π). C'est aussi une base orthonormale. En effet, si $v \in L^2(\Pi, \mathbb{C})$ vérifie $(v, e_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $(ve^{-\frac{1}{2}ix_2}, e^{ik \cdot x}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, ce qui implique $ve^{-\frac{1}{2}ix_2} = 0$, d'après le théorème d'unicité du développement en série de Fourier. On en déduit que $v = 0$. D'après un résultat déjà vu sur les bases hilbertiennes, ceci prouve que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en est une. On peut alors développer F sur cette base : $F = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} F_k e_k$ avec $F_k = (F, e_k)$ et

$$\|F\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |F_k|^2.$$

On cherche également r sous la forme $r = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} r_k e_k$. Notons que

$$\nabla e_k = i \left(k + \frac{1}{2} \omega_2 \right) e_k,$$

d'où

$$(-\Delta - 2is(\partial_1 + i\partial_2))e_k = p_k e_k \quad \text{avec} \quad p_k := \left(\left(k + \frac{1}{2} \omega_2 \right)^2 - 2is \left(ik_1 - \left(k_2 + \frac{1}{2} \right) \right) \right).$$

et donc l'équation $(-\Delta - 2is(\partial_1 + i\partial_2))r = F$ suggère de définir r_k par

$$p_k r_k = F_k.$$

Notons que $|\operatorname{Im} p_k| = |2s(k_2 + \frac{1}{2})| \geq s > 0$ donc p_k ne s'annule jamais et on peut résoudre l'équation précédente. De plus

$$|r_k| \leq \frac{1}{|p_k|} |F_k| \leq \frac{1}{s} |F_k|,$$

ce qui implique que $r \in L^2(\Pi, \mathbb{C})$.

Pour montrer que r appartient à l'espace de Sobolev $H^1(\Pi)$, nous devons montrer que r admet une dérivée au sens faible dans L^2 . Pour cela nous allons utiliser le fait que r est la somme d'une série de termes qui sont C^∞ et appartiennent donc à $H^1(\Pi)$. Il suffit de montrer que la série converge normalement, c'est-à-dire que $\sum |r_k| \|\nabla e_k\|_{L^2} < +\infty$. Ce sera une conséquence de l'inégalité suivante

$$\left| \left(k + \frac{1}{2} e_2 \right) r_k \right| \leq 4 |F_k|, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

ce qui impliquera $\|\nabla r\|_{L^2} \leq 4 \|F\|_{L^2}$. Pour obtenir cette inégalité on considère deux cas : si $|k + \frac{1}{2} e_2| \leq 4s$ alors

$$\left| \left(k + \frac{1}{2} e_2 \right) r_k \right| \leq \frac{4s}{s} |F_k| \leq 4 |F_k|,$$

et si $|k + \frac{1}{2}e_2| \geq 4s$, alors

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} p_k| &= \left| \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right|^2 + 2sk_1 \right| \geq \left| \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right|^2 - 2s|k_1| \right| \geq \left| \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right|^2 - 2s \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right| \right| \\ &\geq 2s \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right|, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left| \left(k + \frac{1}{2}e_2 \right) r_k \right| \leq \frac{|k + \frac{1}{2}e_2|}{|\operatorname{Re} p_k|} |F_k| \leq \frac{|k + \frac{1}{2}e_2|}{2s|k + \frac{1}{2}e_2|} |F_k| \leq \frac{1}{2s} |F_k|.$$

Ceci implique que la série $\sum r_k e_k$ converge normalement dans $H^1(\Pi)$. Comme $H^1(\Pi)$ est un espace de Hilbert, ceci implique que la série converge dans $H^1(\Pi)$ et donc que la somme r appartient à $H^1(\Pi)$. Alors, par définition r est une solution faible dans $H^1(\Pi)$. Ce qui entraîne directement que r est une solution faible dans $H^1(\Omega)$. En effet, si la formulation faible est vraie pour toutes les fonctions tests à supports dans Π , alors elle est vérifiée *a fortiori* pour toute fonction test à support dans Ω .

Ceci conclut la démonstration du lemme. □

Étape 3 : résolubilité de l'EDP conjugué dans le cas $V \neq 0$.

On considère maintenant l'équation

$$(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)r = F,$$

dans le cas général $V \in L^\infty(\Omega)$. On cherche une solution faible $r \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$ vérifiant les estimations (13.3.2).

Pour $V = 0$ la solution est donnée par $r = Q_\rho F$. Pour $V \neq 0$, en s'inspirant de la méthode de variation de la constante, on cherche r sous la forme $Q_\rho \tilde{F}$ où $\tilde{F} \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$ est une fonction à déterminer. Notons que

$$(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)Q_\rho \tilde{F} = \tilde{F} + VQ_\rho \tilde{F},$$

et on s'est donc ramené à résoudre l'équation

$$\tilde{F} + VQ_\rho \tilde{F} = F.$$

Rappelons que $\|Q_\rho F\|_{L^2} \leq \frac{C_0}{|\rho|} \|F\|_{L^2}$. Notons T_ρ l'opérateur défini par $T_\rho f = -VQ_\rho f$. On en déduit que, si $|\rho| \geq \max(2C_0 \|V\|_{L^\infty}, 1)$,

$$\|T_\rho \tilde{F}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|\tilde{F}\|_{L^2},$$

ce qui montre que $I - T_\rho$ est un opérateur inversible sur $L^2(\Omega)$ grâce au lemme suivant.

Lemme 13.6 (Séries de Neumann). *Soit B un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(B)$ vérifiant $\|T\| < 1$. Alors $I - T$ est inversible et son inverse est donnée par*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Démonstration. La démonstration repose d'une part sur le fait que $\mathcal{L}(B)$ est un espace de Banach (car B en est un) et d'autre part sur le fait que la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(B)$ vérifie l'inégalité suivante : $\|T_1 T_2\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \|T_1\|_{\mathcal{L}(B)} \|T_2\|_{\mathcal{L}(B)}$.

Considérons la somme partielle $S_n = T^0 + T + \dots + T^n$. Alors $(I - T)S_n = I - T^{n+1}$ converge vers I car $\|T^{n+1}\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(B)}^{n+1}$ et $\|T\|_{\mathcal{L}(B)} < 1$ par hypothèse. De plus la série S_n converge normalement donc converge car $\mathcal{L}(B)$ est un espace de Banach. Ce résultat, classique, se démontre directement de la façon suivante : puisque

$$\|S_{n+m} - S_n\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \sum_{j=n+1}^{n+m} \|T^j\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} \|T\|_{\mathcal{L}(B)}^j,$$

et puisque le membre de droite de l'inégalité précédente converge vers 0, la suite (S_n) est de Cauchy et par conséquent c'est une suite convergente de l'espace de Banach $\mathcal{L}(B)$. \square

Alors

$$r = Q_\rho(I - T_\rho)^{-1}F$$

vérifie l'équation ; on déduit les estimations sur r de celles démontrées précédemment. Ceci termine la démonstration de la proposition 13.2. \square

Nous aurons également besoin d'une variante de la proposition 13.2 qui donne des solutions de la forme $u(x) = e^{i\rho \cdot x}(a(x) + r(x))$ (nous n'avons pour l'instant considéré que le cas $a = 1$). Nous allons voir que si a est assez régulière, alors on peut obtenir directement de telles solutions à partir de la proposition 13.2. La notion de régularité qui nous convient est celle d'appartenir à l'espace $H^2(\Omega)$.

Corollaire 13.7. *Soit $V \in L^\infty(\Omega)$. Il existe une constante C_0 qui ne dépend que de Ω et de n telle que, pour tout $\rho \in A = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta \cdot \zeta = 0\}$ vérifiant $|\rho| \geq \max(C_0 \|V\|_{L^\infty}, 1)$, et pour toute fonction $a \in H^2(\Omega, \mathbb{C})$ vérifiant $\rho \cdot \nabla a = 0$, l'équation*

$$(-\Delta + V)u = 0$$

a une solution u de la forme $u = e^{i\rho \cdot x}(a + r)$ où $r \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$ vérifie

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2} &\leq \frac{C_0}{|\rho|} \|(-\Delta + V)a\|_{L^2}, \\ \|\nabla r\|_{L^2} &\leq C_0 \|(-\Delta + V)a\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Démonstration. La fonction $u = e^{i\rho \cdot x}(a + r)$ est une solution faible de $(-\Delta + V)u = 0$ si et seulement si

$$(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)(a + r) = 0.$$

Comme $\rho \cdot \nabla a = 0$, on en déduit l'équation suivante sur r :

$$(-\Delta - 2i\rho \cdot \nabla + V)r = -(-\Delta + V)a.$$

L'existence d'une solution à ce problème est obtenue en appliquant la proposition précédente. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un résultat qui, en dimension plus grande que 3, généralise le théorème de Calderón vu au §13.2.

Théorème 13.8. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Supposons que la dimension d'espace est $n \geq 3$. Considérons deux fonctions V_1 et V_2 appartenant à $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et introduisons les ensembles*

$$A_j = \left\{ u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) : -\Delta u_j + V_j u_j = 0 \right\}.$$

L'espace vectoriel engendré par les produits $u_1 u_2$ avec $u_j \in A_j$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarque 13.9. La démonstration montre que l'on a un résultat analogue pour des fonctions à valeurs complexes.

Démonstration. Soit $\varphi \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\int_\Omega u_1 u_2 \varphi \, dx = 0$ pour tout u_j dans A_j ($j = 1, 2$). Nous cherchons à montrer que $\varphi = 0$. Pour cela nous allons utiliser un théorème d'unicité. Comme dans la démonstration du théorème de Calderón nous utiliserons le théorème d'unicité pour la transformée de Fourier (qui énonce que si la transformée de Fourier s'annule, alors la fonction est nulle). L'idée de la démonstration est alors de chercher à approximer $e^{ix \cdot \xi}$ (ξ quelconque dans \mathbb{R}^n) par des produits $u_1 u_2$ avec $u_j \in A_j$. Ceci sera possible, grâce à l'hypothèse $n \geq 3$ et un raisonnement assez astucieux.

Fixons $\xi \in \mathbb{R}^n$. En utilisant l'hypothèse $n \geq 3$, on introduit deux vecteurs ζ_1, ζ_2 de \mathbb{R}^n tels que

$$\xi \perp \zeta_1, \quad \xi \perp \zeta_2, \quad \zeta_1 \perp \zeta_2, \quad |\zeta_1| = |\zeta_2| = 1.$$

Etant donné $s > 0$, posons

$$\rho_s = s(\zeta_1 + i\zeta_2),$$

de sorte que $\rho_s \cdot \rho_s = 0$. Notons que $\rho_s \cdot \xi = 0$ et donc $\rho_s \cdot \nabla e^{ix \cdot \xi} = 0$. De plus, comme Ω est borné, les fonctions $e^{ix \cdot \xi}$ et la fonction constante 1 appartiennent à $H^2(\Omega)$. On peut donc appliquer le résultat précédent avec $a = e^{ix \cdot \xi}$ ou $a = 1$. On en déduit que si s est

assez grand, il existe deux fonctions $u_{1,s}$ et $u_{2,s}$ dans $H^1(\Omega, \mathbb{C})$ qui sont solutions faibles de $(-\Delta + V_j)u_{j,s} = 0$ et qui sont de la forme

$$\begin{aligned} u_{1,s} &= e^{i\rho_s \cdot x} (e^{ix \cdot \xi} + r_{1,s}), \\ u_{2,s} &= e^{-i\rho_s \cdot x} (1 + r_{2,s}), \end{aligned}$$

où $\|r_{j,s}\|_{L^2} \leq C/s$ pour $j = 1, 2$. Alors les parties réelles et imaginaires de $u_{1,s}$ (resp. $u_{2,s}$) appartiennent à A_1 (resp. A_2). Par hypothèse sur φ , l'intégrale $\int_{\Omega} \varphi f \, dx$ s'annule lorsque f est le produit de fonctions de A_1 et A_2 et donc

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{Re} u_{1,s} \operatorname{Re} u_{2,s} \, dx = \dots = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{Im} u_{1,s} \operatorname{Im} u_{2,s} \, dx = 0.$$

On en déduit que $\int_{\Omega} \varphi u_{1,s} u_{2,s} \, dx = 0$, d'où

$$\int_{\Omega} \varphi (e^{ix \cdot \xi} + r_{1,s})(1 + r_{2,s}) \, dx = 0.$$

En passant à la limite quand $s \rightarrow +\infty$, il suit que

$$\int_{\Omega} \varphi(x) e^{ix \cdot \xi} \, dx = 0.$$

Comme cela est vrai pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a montré que $\widehat{\chi_{\Omega} \varphi} = 0$. Ceci implique que $\varphi = 0$, ce qui conclut la démonstration. \square

13.4 Théorème de Sylvester-Uhlmann

Nous voulons dans cette partie expliquer comment utiliser le résultat précédent pour résoudre le problème qui avait motivé le travail de Calderón. Nous nous bornerons à faire des calculs formels, mais il serait facile de les justifier rigoureusement si l'on disposait du cadre fonctionnel adéquat.

Rappelons le contexte. On considère un ouvert Ω qui est C^∞ et borné. Étant donné une fonction $V \in L^\infty(\Omega)$ telle que $V \geq 0$ et une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de Dirichlet d'inconnue la fonction $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce problème est bien posé (il existe une unique solution u appartenant à $H^1(\Omega)$). On peut alors définir l'opérateur de Dirichlet-Neumann par

$$\Lambda_V(f) = \partial_n u|_{\partial\Omega}.$$

Si l'on dispose du bon cadre fonctionnel, on peut montrer que c'est un opérateur linéaire continu auto-adjoint (de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans son dual). Un théorème important, dû à Sylvester et Uhlmann énonce que, en dimension $n \geq 3$, l'opérateur Λ_V détermine le potentiel V . Précisément, leur résultat énonce que l'application $V \mapsto \Lambda_V$ est injective.

Nous allons expliquer, par des calculs formels, comment ce résultat est relié à ce que nous avons fait précédemment. Pour cela, considérons deux fonctions u_1, u_2 vérifiant (au sens faible)

$$-\Delta u_1 + V_1 u_1 = 0, \quad -\Delta u_2 + V_2 u_2 = 0.$$

Introduisons les traces de u_1 et u_2 sur le bord, notées f_1, f_2 , définies par

$$f_1 = u_1|_{\partial\Omega}, \quad f_2 = u_2|_{\partial\Omega}.$$

Alors $\Lambda_{V_1} f_1 = \partial_n u_1|_{\partial\Omega}$ et donc, en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $L^2(\partial\Omega)$ (il faudrait pour être rigoureux comprendre le calcul suivant au sens de la dualité),

$$\langle \Lambda_{V_1} f_1, f_2 \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} u_2 \, dS.$$

Si u_1 et u_2 sont des fonctions régulières, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} u_2 \, dS &= \int_{\partial\Omega} X \cdot n \, dS \quad \text{avec } X = u_2 \nabla u_1 \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} X \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} (u_2 \nabla u_1) \, dx = \int_{\Omega} u_2 \Delta u_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla u_1 \, dx, \end{aligned}$$

et comme $\Delta u_1 = V_1 u_1$, on en déduit que

$$\langle \Lambda_{V_1} f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + V_1 u_1 u_2 \, dx.$$

De même

$$\langle \Lambda_{V_2} f_2, f_1 \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + V_2 u_1 u_2 \, dx.$$

Comme Λ_{V_2} est auto-adjoint, on en déduit

$$\langle (\Lambda_{V_1} - \Lambda_{V_2}) f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} (V_1 - V_2) u_1 u_2 \, dx.$$

Si $\Lambda_{V_1} = \Lambda_{V_2}$, alors il suit que

$$0 = \int_{\Omega} (V_1 - V_2) u_1 u_2 \, dx,$$

pour toute fonctions u_1, u_2 dans $H^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u_j + V_j u_j = 0$. Le théorème 13.8 entraîne alors le résultat voulu : $V_1 = V_2$.

Chapitre 14

Théorème de De Giorgi

14.1 Introduction

Fixons $n \geq 2$ et Ω un ouvert borné quelconque de \mathbb{R}^n . Considérons un opérateur L d'ordre deux, de la forme suivante

$$Lu = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_j (a_{ij} \partial_i u),$$

où les coefficients $a_{ij}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables (et pas nécessairement des constantes).

Définition 14.1. *On dit que L est un opérateur elliptique s'il existe deux constantes strictement positives λ, Λ telles que*

$$(14.1.1) \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad \lambda |\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j,$$

et

$$(14.1.2) \quad \sup_{i, j} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda.$$

Nous allons nous intéresser à la régularité des solutions de l'équation $Lu = 0$. Puisque l'on suppose seulement que les coefficients appartiennent à $L^\infty(\Omega)$, l'équation $Lu = 0$ est à comprendre au sens faible.

Définition 14.2. *Une solution faible de l'équation $Lu = 0$ est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant*

$$\forall \phi \in C_0^1(\Omega), \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j \phi) dx = 0.$$

Remarque 14.3. Nous allons étudier la régularité des solutions faibles sans se préoccuper de la question de l'existence de telles solutions. Concernant la question de l'existence, bornons nous à rappeler brièvement comment résoudre le problème $Lu = 0$ avec une condition sur la trace de u au bord, de la forme $u|_{\partial\Omega} = f$. Pour cela il est commode de commencer par se ramener à résoudre un problème de la forme $Lv = F$ dans Ω , avec condition de trace nulle $v|_{\partial\Omega} = 0$ (pour cela on peut utiliser un théorème de relèvement). On est ensuite conduit à travailler dans l'espace des fonctions de trace nulle sur le bord, noté $H_0^1(\Omega)$. Par définition, c'est l'adhérence de $C_0^1(\Omega)$ (ou de $C_0^\infty(\Omega)$) pour la norme de $H^1(\Omega)$. La propriété fondamentale est que cet espace est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (on utilise l'inégalité de Poincaré pour le démontrer). L'existence d'une solution faible est alors obtenue grâce au théorème de Lax-Milgram (ou simplement le théorème de représentation de Riesz si on suppose que la matrice (a_{ij}) est symétrique). Il s'agit concrètement de démontrer que la forme bilinéaire B , définie par

$$B(u, \phi) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j \phi) \, dx,$$

est une forme bilinéaire coercive sur $H_0^1(\Omega)$. On constate alors que la définition 14.1 est très générale au sens où les hypothèses sur les coefficients sont nécessaires pour garantir que B est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

Nous allons étudier la théorie de De Giorgi-Nash-Moser. Le résultat principal, spectaculaire, énonce que les solutions faibles appartiennent à un espace de Hölder.

Définition (Espaces de Hölder). *Soit O un ouvert de \mathbb{R}^n , $u: O \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$. On définit*

$$\|u\|_{\alpha, O} := \sup_{x \neq y \in O} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Par définition, l'espace de Hölder $C^{0, \alpha}(O)$ est l'ensemble des fonctions u continues et bornées sur O telles que $\|u\|_{\alpha, O} < \infty$. C'est un espace de Banach (exercice) pour la norme

$$\|u\|_{C^{0, \alpha}(O)} := \sup_{x \in O} |u(x)| + \sup_{x \neq y \in O} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Théorème 14.4 (De Giorgi). *Pour toute boule $B \subset \Omega$, il existe $\alpha \in]0, 1]$ et $C > 0$ tels que,*

$$\|u\|_{C^{0, \alpha}(B)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

pour toute solution faible $u \in H^1(\Omega)$ de $Lu = 0$.

Le lien entre ce théorème et les résultats démontrés dans les chapitres précédents est qu'il concerne la régularité des solutions d'un problème elliptique linéaire. Il y a cependant

plusieurs différences fondamentales entre ce que nous avons vu en analyse microlocale et le théorème de De Giorgi.

- i) Différence de contexte. Le théorème de De Giorgi s'applique sous des hypothèses très générales sur les coefficients. On ne fait aucune hypothèse de régularité sur les coefficients a_{ij} , alors que dans les chapitres précédents sur l'analyse microlocale on considérait des équations à coefficients réguliers.
- ii) Différence dans la méthode de démonstration. Le fait que l'on ne fasse aucune hypothèse de régularité sur les coefficients entraîne que l'on ne pourra pas utiliser, comme on le faisait, une approche qui consiste à modifier l'équation (par conjugaison ou par calcul symbolique). Au lieu de modifier l'équation, nous verrons que la démonstration du théorème de De Giorgi consiste à transformer l'inconnue. L'élément clé à retenir est que ce résultat, qui est un résultat **linéaire**, repose sur des changements d'inconnues **non linéaires**.

14.2 Sous-solutions et transformations non linéaires

La démonstration du théorème de De Giorgi consiste à introduire des changements d'inconnues non linéaires, de la forme $v = \Phi(u)$. Cela va nécessiter plusieurs idées. Il faudra bien sûr choisir ces fonctions Φ . Pour ce faire, l'obstacle principal se comprend bien : en général, $v = \Phi(u)$ n'est pas une solution faible de $Lv = 0$. L'idée pour pouvoir travailler avec des expressions non linéaires va reposer sur deux principes : *i*) il est utile d'élargir la notion de solution (on considérera des *sous-solutions*, ce qui revient à dire que $Lu \geq 0$) et *ii*) on considérera des changements d'inconnues non linéaires particuliers, qui sont tels que la notion élargie de sous-solution est préservée (ce sera le cas si Φ est une fonction *convexe croissante*). En guise d'introduction à cette approche, commençons par considérer des solutions régulières.

Définition. Soit $u \in C^2(\Omega)$ et supposons que les coefficients a_{ij} sont suffisamment réguliers pour que Lu soit une fonction définie ponctuellement (par exemple $a_{ij} \in C^1(\Omega)$). On dit que u est une sous-solution si $Lu \geq 0$.

Proposition 14.5. Soit $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ une fonction convexe croissante. Si $u \in C^2(\Omega)$ est une sous-solution alors $\Phi(u)$ est une sous-solution.

Démonstration. On a $L(\Phi(u)) = \Phi''(u) \sum a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j u) + \Phi'(u)Lu$. Or par hypothèse on a $\sum a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j u) \geq \lambda |\nabla u|^2$. Par ailleurs $\Phi''(u) \geq 0$ et $\Phi'(u) \geq 0$ par hypothèse sur Φ . On vérifie donc que $L(\Phi(u)) \geq 0$, ce qui est le résultat désiré. \square

La proposition précédente concerne les solutions régulières de $Lu = 0$ alors qu'un aspect crucial du théorème de De Giorgi est qu'il concerne les solutions faibles. Nous allons donc donner une définition de sous-solution au sens faible, puis montrer que l'on peut étendre la proposition précédente à ce contexte.

Définition. Une sous-solution faible est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que, pour tout $\phi \in C_0^1(\Omega)$ avec $\phi \geq 0$,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \int a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j \phi) \, dx \leq 0.$$

Une sous-solution faible positive est une sous-solution faible u qui vérifie $u \geq 0$.

Remarque 14.6. Comme $C_0^1(\Omega)$ est dense, par définition, dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, on a aussi

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \int a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j \phi) \, dx \leq 0,$$

pour toute fonction positive ϕ appartenant à $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 14.7. Soit $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction convexe C^2 , croissante, avec Φ' bornée et telle que $\Phi''(y) = 0$ si $|y| \geq R$ pour un certain $R > 0$. Supposons que $u \in H^1(\Omega)$ est une sous-solution faible. Alors $\Phi(u) \in H^1(\Omega)$ est aussi une sous-solution.

Démonstration. Nous commençons par deux lemmes qui permettent de calculer des dérivées au sens faible d'expressions non linéaires. Rappelons le résultat suivant déjà vu dans le chapitre sur les espaces de Sobolev.

Lemme 14.8. Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in C_b^1(\Omega)$ (l'indice b signifie que v et ses dérivées sont des fonctions bornées sur Ω). Alors le produit uv appartient à $H^1(\Omega)$, les dérivées au sens faible vérifient

$$\partial_i(uv) = u\partial_i v + (\partial_i u)v, \quad i = 1, \dots, n,$$

et on a

$$\|uv\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}.$$

Rappelons que Ω est un ouvert borné par hypothèse.

Lemme 14.9. Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction telle que G' est une fonction bornée sur \mathbb{R} . Si $u \in H^1(\Omega)$ alors la fonction composée $G(u)$ appartient à $H^1(\Omega)$ et de plus les dérivées au sens faible de $G(u)$ vérifient

$$\partial_i G(u) = G'(u)\partial_i u, \quad i = 1, \dots, n.$$

Le lemme précédent et les hypothèses sur Φ garantissent que $\Phi(u) \in H^1(\Omega)$. Considérons $\phi \in C_0^1(\Omega)$ à valeurs positives. On veut montrer que

$$(14.2.1) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}(\partial_i \Phi(u))(\partial_i \phi) \, dx \leq 0.$$

Le lemme 14.9 implique que, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\partial_i \Phi(u) = \Phi'(u) \partial_i u, \quad \partial_i \Phi'(u) = \Phi''(u) \partial_i u.$$

En utilisant le Lemme 6.26, on peut alors écrire que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}(\partial_i \Phi(u))(\partial_i \phi) \, dx &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \Phi'(u) (\partial_i u) (\partial_i \phi) \, dx = (I) + (II) \quad \text{avec} \\ (I) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}(\partial_i u) \partial_j (\Phi'(u) \phi) \, dx, \\ (II) &= - \int_{\Omega} \Phi''(u) \phi \sum_{i,j} a_{ij}(\partial_i u) (\partial_j u) \, dx. \end{aligned}$$

Comme $\Phi'(u)$ appartient à $H^1(\Omega)$ (d'après le lemme 14.9) et comme $\phi \in C_0^1(\Omega)$, on a $\Phi'(u)\phi \in H^1(\Omega)$ d'après le lemme 14.8. De plus, en utilisant que ϕ est une fonction à support compact, on montre (exercice) que $\Phi'(u)\phi$ appartient à l'espace $H_0^1(\Omega)$ (car cette fonction est la limite pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ d'une suite de fonction appartenant à $C_0^1(\Omega)$). De plus $\Phi'(u)\phi \geq 0$ car $\phi \geq 0$ et car Φ est croissante. Alors, comme cela a été mentionnée à la remarque 14.6, on a $(I) \leq 0$. Il nous reste à montrer que, de même, $(II) \leq 0$. Pour cela on utilise l'hypothèse de convexité pour obtenir que $\Phi''(u) \geq 0$. Par ailleurs, l'hypothèse d'ellipticité (14.1.1) implique que $\sum_{i,j} a_{ij}(\partial_i u) (\partial_j u) \geq 0$. On obtient donc $(II) \leq 0$, ce qui complète la démonstration du résultat voulu (14.2.1). La proposition est démontrée. \square

L'argument essentiel pour étudier la régularité elliptique est l'inégalité de Caccioppoli. Nous avons déjà vu cette inégalité dans le chapitre consacré aux fonctions harmoniques. Nous allons maintenant voir que cette inégalité reste vraie pour des sous-solutions d'un problème général à coefficients variables. Considérons deux ouverts ω, Ω avec $\omega \subset \Omega$ et une fonction $u \in H^1(\Omega)$ sous-solution faible de l'équation $Lu = 0$. L'inégalité de Caccioppoli permet d'estimer $\|\nabla u\|_{L^2(\omega)}$ en fonction de $\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Lemme 14.10 (Lemme de Caccioppoli pour les sous-solutions). *Considérons une sous-solution faible positive $v \in H^1(\Omega)$ et un ouvert $\omega \subset\subset \Omega$. Il existe une constante C , ne dépendant que de $\Omega, \omega, n, \lambda, \Lambda$, telle que*

$$(14.2.2) \quad \int_{\omega} |\nabla v|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} v^2 \, dx.$$

Dans le cas où $\Omega = B(x_0, \rho)$ et $\omega = B(x_0, r)$ avec $r < \rho$, alors

$$(14.2.3) \quad C = \frac{K}{(\rho - r)^2},$$

où K est une constante qui ne dépend que de n, λ, Λ .

Démonstration. Comme nous l'avons mentionné à la remarque 14.6, on a

$$(14.2.4) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int a_{ij}(\partial_i v)(\partial_j \phi) \, dx \leq 0,$$

pour toute fonction positive ϕ appartenant à $H_0^1(\Omega)$.

Considérons maintenant une fonction $\psi \in C_0^1(\Omega)$, à valeurs dans $[0, +\infty[$, et qui vaut 1 sur ω . Comme nous l'avons rappelé dans la démonstration de la proposition précédente, la fonction $\phi = \psi^2 v$ appartient à $H_0^1(\Omega)$. De plus cette fonction est positive car v est positive par hypothèse. On peut utiliser le lemme 6.26 et la relation (14.2.4) pour écrire que

$$\int_{\Omega} \psi^2 \sum_{i, j} a_{ij}(\partial_i v)(\partial_j v) \, dx \leq -2 \int_{\Omega} \psi v \sum_{i, j} a_{ij}(\partial_i v)(\partial_j \psi) \, dx.$$

Introduisons la matrice $A = (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$. D'après le lemme de Cauchy-Schwarz on a

$$\left| \int_{\Omega} \psi v \sum_{i, j} a_{ij}(\partial_i v)(\partial_j \psi) \, dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \psi^2 |A \nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2 |\nabla \psi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, les hypothèses (14.1.1) et (14.1.2) sur les coefficients a_{ij} entraînent que $|A \nabla v| \leq n\Lambda |\nabla v|$ et

$$\lambda \int_{\Omega} \psi^2 |\nabla v|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} \psi^2 \sum_{i, j} a_{ij}(\partial_i v)(\partial_k v) \, dx.$$

En combinant les inégalités précédentes on vérifie que

$$\int_{\Omega} \psi^2 |\nabla v|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} |v|^2 |\nabla \psi|^2 \, dx.$$

On en déduit le résultat voulu (14.2.2). Pour obtenir le contrôle (14.2.3) de la constante, il suffit de considérer une fonction $\psi \in C_0^1(B(x_0, \rho))$ qui vaut 1 sur $B(x_0, r)$ et qui tend vers 0 linéairement entre $\partial B(x_0, r)$ et $\partial B(x_0, \rho)$. \square

Nous allons maintenant combiner le lemme de Caccioppoli et la proposition 14.7. Le but est de pouvoir considérer des changements d'inconnues plus généraux, de la forme $v = \Phi(u)$ où Φ est n'importe quelle fonction convexe croissante telle que $\Phi(u)$ appartient à $L^2(\Omega)$.

Proposition 14.11. *Soit $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction convexe et croissante. Considérons une sous-solution faible $u \in H^1(\Omega)$ et considérons un ouvert $\omega \subset\subset \Omega$. Si $v = \Phi(u)$ appartient à $L^2(\Omega)$, alors $v \in H^1(\omega)$ et v est une sous-solution positive dans ω , ce qui signifie que, pour tout $\phi \in C_0^1(\omega)$ avec $\phi \geq 0$,*

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\omega} a_{ij}(\partial_i v)(\partial_j \phi) \, dx \leq 0.$$

Démonstration. Introduisons une suite de fonctions $\Phi_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ convexes croissantes, C^2 , qui vérifient $\Phi_n''(y) = 0$ si $|y| \geq R_n$ et telle que

$$0 \leq \Phi_n \leq \Phi \quad \text{et} \quad \Phi_n(y) \text{ converge vers } \Phi(y) \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Comme $\Phi(u) \in L^2(\Omega)$ par hypothèse et que $0 \leq \Phi_n(u) \leq \Phi(u)$, le théorème de convergence dominée implique que $\Phi_n(u)$ converge vers $\Phi(u)$ dans $L^2(\Omega)$. Par ailleurs le lemme de Caccioppoli et la proposition 14.7 impliquent que $\Phi_n(u)$ est bornée dans $H^1(\omega)$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$. Comme $H^1(\omega)$ est un espace de Hilbert, on peut extraire une sous-suite $(\Phi_{n'})$ qui converge faiblement dans $H^1(\omega)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $v = \Phi(u)$ appartient à $H^1(\omega)$. De plus, v est une sous-solution car la notion de sous-solution est clairement stable par passage à la limite faible. \square

Lorsque Φ est une fonction convexe, qui n'est pas nécessairement croissante, on dispose d'un résultat analogue mais qui ne s'applique qu'aux solutions faibles (il est faux en général pour les sous-solutions faibles).

Proposition 14.12. *Soit $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction convexe monotone. Considérons une solution faible $u \in H^1(\Omega)$ et considérons un ouvert $\omega \subset\subset \Omega$. Si $v = \Phi(u)$ appartient à $L^2(\Omega)$, alors $v \in H^1(\omega)$ et v est une sous-solution positive dans ω .*

Démonstration. Si Φ est croissante alors le résultat est un corollaire direct de la proposition précédente. Considérons alors le cas où Φ est décroissante. Dans ce cas la fonction $\tilde{\Phi}: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(-t)$ est une fonction convexe croissante et on a $v = \tilde{\Phi}(-u)$. Comme u est solution faible, $-u$ est aussi solution faible, donc *a fortiori* une sous-solution faible. Le résultat voulu est donc une conséquence de la proposition précédente. \square

14.3 Itérations de Moser

On note $B(x_0, \rho)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon $\rho > 0$.

Théorème 14.13. Fixons $x_0 \in \Omega$ et considérons $0 < r < \rho$ tels que $B(x_0, \rho) \subset \Omega$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$ sous-solution positive de L , on ait

$$\|v\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq c \|v\|_{L^2(B(x_0, \rho))}.$$

Démonstration. La preuve que nous suivons est due à Moser. Fixons $x_0 \in \Omega$ et considérons $0 < r < \rho$ tels que $B(x_0, \rho) \subset \Omega$. On autorisera toutes les constantes à dépendre de x_0, r, ρ . Considérons une suite de boules $B_j = B(x_0, R_j)$ avec $R_j = r + (\rho - r)2^{-j}$ de sorte que

$$B_{j+1} \subset B_j \subset \cdots \subset B(x_0, \rho) \quad \text{et} \quad B_\infty := \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_j = \overline{B(x_0, r)}.$$

Le principe de la démonstration est qu'il existe $\kappa > 1$ tel que l'on peut estimer $\|v\|_{L^{2\kappa^{j+1}}(B_{j+1})}$ en fonction de $\|v\|_{L^{2\kappa^j}(B_j)}$. L'existence de la constante κ provient du corollaire suivant de l'injection de Sobolev.

Lemme 14.14. Soit $\kappa \in [1, n/(n-2)]$. Il existe une constante γ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout $v \in H^1(B_{j+1})$ on ait

$$(14.3.1) \quad \|v^\kappa\|_{L^2(B_{j+1})}^2 \leq \gamma \|\nabla v\|_{L^2(B_{j+1})}^{2\kappa} + \gamma \|v\|_{L^2(B_{j+1})}^{2\kappa}.$$

Démonstration. L'inégalité de Sobolev (cf le photocopié d'Analyse Fonctionnelle) implique que

$$\|v^\kappa\|_{L^2(B_{j+1})}^2 \leq C \|v\|_{H^1}^{2\kappa} = C \left[\|\nabla v\|_{L^2(B_{j+1})} + \|v\|_{L^2(B_{j+1})} \right]^{2\kappa}.$$

On utilise alors que la fonction $t \mapsto t^{2\kappa}$ est croissante pour obtenir que

$$(s + t)^{2\kappa} \leq (2 \max\{s, t\})^{2\kappa} \leq 2^{2\kappa} (s^{2\kappa} + t^{2\kappa}),$$

et on en déduit l'inégalité recherchée. \square

Lemme 14.15. Fixons $\kappa \in]1, n/(n-2)[$ pour $n \geq 3$ et $\kappa \in]1, +\infty[$ si $n = 2$. Supposons que $v \in H^1(B_j)$ est une sous-solution faible positive. Alors v^κ appartient à $H^1(B_{j+1})$ et est une sous-solution faible positive dans B_{j+1} . De plus

$$\|v^\kappa\|_{L^2(B_{j+1})}^2 \leq C(2^{2\kappa j} + 1) \|v\|_{L^2(B_j)}^{2\kappa},$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de $n, \lambda, \Lambda, r, \rho$.

Démonstration. Considérons la fonction convexe $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$\Phi(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0, \quad \Phi(t) = t^\kappa \quad \text{si } t \geq 0.$$

Si $v \in H^1(B_j)$, alors l'injection de Sobolev implique que $\Phi(v)$ appartient à $L^2(B_j)$. On peut alors appliquer la proposition 14.11. On en déduit que $v^\kappa = \Phi(v)$ appartient à $H^1(B_{j+1})$ et que v^κ est une sous-solution faible positive dans B_{j+1} .

Pour démontrer l'estimation recherchée, on utilise l'injection de Sobolev

$$(14.3.2) \quad \|v^\kappa\|_{L^2(B_{j+1})}^2 \leq \gamma \|\nabla v\|_{L^2(B_{j+1})}^{2\kappa} + \gamma \|v\|_{L^2(B_{j+1})}^{2\kappa}.$$

De plus on a l'inégalité de Caccioppoli

$$\|\nabla v\|_{L^2(B_{j+1})} \leq C_j \|v\|_{L^2(B_j)}.$$

Pour contrôler la constante C_j nous allons utiliser la propriété (14.2.3) (en faisant attention au fait que dans (14.2.3) on a une inégalité pour le carré des normes). Comme la différence entre le rayon de B_j et celui de B_{j+1} est proportionnel à 2^{-j} , on obtient que l'on peut choisir C_j de sorte que

$$C_j \leq K 2^j$$

où $K > 0$ est une constante qui ne dépend que de $n, \lambda, \Lambda, r, \rho$.

En combinant les inégalités précédentes, il vient

$$\|v^\kappa\|_{L^2(B_{j+1})}^2 \leq \gamma \left[C_j^{2\kappa} \|v\|_{L^2(B_j)}^{2\kappa} + \|v\|_{L^2(B_{j+1})}^{2\kappa} \right] \leq \gamma (C_j^{2\kappa} + 1) \|v\|_{L^2(B_j)}^{2\kappa},$$

qui est le résultat recherché. □

On introduit alors une suite de fonctions définies par

$$v_j = v^{\kappa^j}.$$

Alors si $v \in H^1(B_0)$ est une sous-solution faible positive, on obtient à partir du lemme précédent, par récurrence, que v_j appartient à $H^1(B_j)$ et est aussi une sous-solution faible dans B_j . Notons que $v_{j+1} = (v_j)^\kappa$ et posons

$$N_j = \|v\|_{L^{2\kappa^j}(B_j)} = \|v_j\|_{L^2(B_j)}^{1/\kappa^j},$$

de sorte que

$$\|v\|_{L^\infty(B(x_0, r))} = \limsup_{j \rightarrow +\infty} N_j.$$

On a

$$N_{j+1}^{2\kappa^{j+1}} = \|v_{j+1}\|_{L^2(B_{j+1})}^2 \leq C(2^{2\kappa^j} + 1) \|v_j\|_{L^2(B_j)}^{2\kappa} = C(2^{2\kappa^j} + 1) N_j^{2\kappa^{j+1}}.$$

Donc

$$N_{j+1}^2 \leq \left(C(2^{2\kappa^j} + 1) \right)^{1/\kappa^{j+1}} N_j^2.$$

On trouve

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} N_j^2 \leq \prod_{j=0}^{\infty} \left[C(2^{2\kappa^j} + 1) \right]^{1/\kappa^{j+1}} N_0^2 \leq c^2 N_0^2.$$

Ce qui donne l'estimation désirée. □

14.4 Inégalité d'Harnack

Nous avons déjà vu l'inégalité d'Harnack pour les fonctions harmoniques, c'est-à-dire les fonctions u telles que $\Delta u = 0$ (voir le théorème 7.5). Cette inégalité énonce que si Ω est connexe et borné, et que u est une fonction harmonique positive sur Ω , alors $\sup_{x \in \Omega} u(x)$ est majorée par $C \inf_{x \in \Omega} u(x)$ où C est une constante universelle. La démonstration reposait sur la formule de la moyenne. Nous allons ici considérer le cas beaucoup plus difficile d'une équation à coefficients variables. Dans ce cas on ne dispose plus de la formule de la moyenne, ni d'aucune autre formule de représentation. Cependant nous allons voir que l'on peut démontrer, pour une équation à coefficients L^∞ , une version affaiblie de l'inégalité d'Harnack.

Théorème 14.16. *Supposons que $u \in H^1(B(x_0, 4R))$ est une solution faible positive vérifiant*

$$|\{x \in B(x_0, 2R); u(x) \geq 1\}| \geq \varepsilon |B(x_0, 2R)|,$$

avec $\varepsilon > 0$. Alors il existe une constante c qui ne dépend que de $\varepsilon, n, \lambda, \Lambda, R$ telle que

$$\inf_{B(x_0, R)} u \geq c.$$

Pour démontrer ce théorème nous utilisons la version suivante de l'inégalité de Poincaré.

Lemme 14.17. *Considérons une boule $B \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\varepsilon, n)$ telle que pour tout $u \in H^1(B)$ vérifiant*

$$|\{x \in B; u = 0\}| \geq \varepsilon |B|$$

on ait

$$\int_B u^2 dx \leq C \int_B |\nabla u|^2 dx.$$

Démonstration. Par l'absurde, si cela est faux on peut construire une suite (u_m) d'éléments de $H^1(B)$ telle que

$$|\{x \in B; u_m = 0\}| \geq \varepsilon |B|, \quad \int_B u_m^2 dx = 1, \quad \int_B |\nabla u_m|^2 dx \rightarrow 0.$$

Alors on peut supposer que (u_m) converge vers $u_0 \in H^1(B)$, fortement dans $L^2(B)$ et faiblement dans $H^1(B)$. Alors u_0 est une constante non nulle. De plus

$$0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_B |u_m - u_0|^2 dx \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\{u_m=0\}} |u_m - u_0|^2 dx \geq |u_0|^2 \inf_m |\{u_m = 0\}| > 0,$$

d'où la contradiction. □

Démonstration du théorème 14.16. On peut supposer que $u \geq \delta > 0$ (quitte à appliquer le résultat à $u + \delta$, puis à faire tendre δ vers 0). Le résultat va être obtenu en examinant $v = \max(-\log u, 0)$.

Introduisons $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, de la forme

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \alpha t + \beta && \text{si } t \leq \delta, \\ \Phi(t) &= -\log(t) && \text{si } \delta \leq t \leq 1, \\ \Phi(t) &= 0 && \text{si } 1 \leq t, \end{aligned}$$

où α et β sont choisis de façon à obtenir une fonction convexe. Comme $u \geq \delta$ on a $v = \Phi(u)$. Nous voulons montrer que v est une sous-solution. Notons que Φ est décroissante. Comme u est une solution faible, et pas uniquement une sous-solution faible, on peut utiliser la proposition 14.12. Ainsi, pour montrer que v appartient à $H^1(B(x_0, 2R))$ et que v est une sous-solution sur $B(x_0, 2R)$, il suffit de savoir que $v \in L^2(B(x_0, 3R))$. Or cela est un corollaire immédiat du fait que u appartient à $L^\infty(B(x_0, 3R))$ d'après le théorème 14.13. On peut également appliquer l'estimation L^∞ donnée par le théorème 14.13 à v , ce qui implique

$$(14.4.1) \quad \|v\|_{L^\infty(B(x_0, R))} \leq c \|v\|_{L^2(B(x_0, 2R))}.$$

Notons que

$$|\{x \in B(x_0, 2R); v = 0\}| = |\{x \in B(x_0, 2R); u \geq 1\}| \geq \varepsilon |B(x_0, 2R)|.$$

L'inégalité de Poincaré précédente entraîne que

$$(14.4.2) \quad \|v\|_{L^2(B(x_0, 2R))} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(B(x_0, 2R))}.$$

Nous voulons montrer que le membre de droite est borné. Pour cela nous allons utiliser une variante de l'inégalité de Caccioppoli obtenue en considérons la fonction test $\phi = \zeta^2/u$ où $\zeta \in C_0^1(B(x_0, 4R))$. Comme $u \geq \delta$, la fonction ζ est bien définie et appartient à H_0^1 . Comme u est une solution faible, on obtient que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B(x_0, 4R)} \sum a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j \phi) \, dx \\ &= - \int_{B(x_0, 4R)} \frac{\zeta^2}{u^2} \sum_{ij} a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j u) \, dx + 2 \int_{B(x_0, 4R)} \frac{\zeta}{u} \sum_{ij} a_{ij}(\partial_i u)(\partial_j \zeta) \, dx \end{aligned}$$

ce qui implique (en utilisant la condition d'ellipticité et l'inégalité d'Hölder)

$$\int_{B(x_0, 4R)} \zeta^2 |\nabla \log u|^2 \, dx \leq C \int_{B(x_0, 4R)} |\nabla \zeta|^2 \, dx$$

Donc en choisissant ζ égal à 1 sur $B(x_0, 2R)$ puis allant linéairement vers 0 sur $\partial B(x_0, 4R)$, on trouve

$$\int_{B(x_0, 2R)} |\nabla \log u|^2 dx \leq C.$$

En combinant cette inégalité avec (14.4.1) et (14.4.2) (et le fait que $f \mapsto \max\{f, 0\}$ est bornée de H^1 dans H^1) on en déduit

$$\sup_{B(x_0, R)} v \leq C$$

ce qui donne $\inf_{B(x_0, R)} u \geq e^{-C} > 0$. Le théorème est démontré. \square

14.5 Régularité Hölderienne

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de De Giorgi, dont on commence par rappeler l'énoncé.

Théorème 14.18 (De Giorgi). *Considérons $x_1 \in \Omega$ et $R > 0$ tels que $B(x_1, 5R) \subset \Omega$. Alors il existe $\alpha \in]0, 1]$ et $C > 0$ tels que,*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B(x_1, R/2))} \leq C \|u\|_{L^2(B(x_1, 5R))},$$

pour toute solution faible $u \in H^1(B(x_1, 5R))$ de $Lu = 0$.

Remarque 14.19. Le même résultat est vrai si on remplace dans l'énoncé ci-dessus $5R$ (resp. $R/2$) par R' (resp. R'') où R' (resp. R'') est un nombre réel quelconque strictement plus grand (resp. plus petit) que R . Pour le voir il suffit d'utiliser un argument de changement d'échelle, comme cela sera fait dans la démonstration du lemme 14.21.

Démonstration. Nous commençons par montrer que u appartient à L^∞ , quitte à travailler sur une boule plus petite.

Lemme 14.20. *On a $u \in L^\infty(B(x_1, 2R))$ et de plus*

$$\|u\|_{L^\infty(B(x_1, 2R))} \leq C \|u\|_{L^2(B(x_1, 4R))},$$

où la constante C ne dépend que de n, λ, Λ, R .

Démonstration. Considérons les fonctions convexes $y \mapsto \max\{y, 0\}$ et $y \mapsto \max\{-y, 0\}$. Comme u est une solution faible (et pas uniquement une sous-solution), on peut appliquer la proposition 14.12 pour en déduire que $\max\{u, 0\}$ et $\max\{-u, 0\}$ sont des sous-solutions faibles positives. On utilise alors l'estimation L^∞ pour les sous-solutions positives donnée par le théorème 14.13. On en déduit que $\max\{u, 0\}$ et $\max\{-u, 0\}$ appartiennent à $L^\infty(B(x_1, 2R))$, ce qui implique le résultat voulu. \square

Maintenant que l'on sait que u appartient à $L^\infty(B(x_1, 2R))$, il reste à montrer que

$$(14.5.1) \quad \sup_{x \neq y \in B(x_1, R/2)} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C \|u\|_{L^2(B(x_1, 5R))}.$$

Pour cela il sera commode de fixer $x_0 \in B(x_1, R/2)$ et de montrer qu'il existe une constante C , indépendante de x_0 , telle que

$$(14.5.2) \quad \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \leq C \|u\|_{L^2(B(x_0, 4R))},$$

pour tout $x \in B(x_0, R) \setminus \{x_0\}$. Nous expliquerons plus loin comment en déduire facilement l'inégalité (14.5.1).

Pour démontrer (14.5.2), nous allons étudier l'oscillation de u sur les boules $B(x_0, r)$ avec $r \leq 2R$. Par définition, l'oscillation de u sur la boule $B(x_0, r)$ est la quantité

$$\omega(r) = \sup_{B(x_0, r)} u(x) - \inf_{B(x_0, r)} u(x).$$

Lemme 14.21. *Il existe $\gamma \in [0, 1[$ tel que, pour tout $r \in]0, R]$,*

$$\omega(r) \leq \gamma \omega(2r).$$

Démonstration. La démonstration est en deux étapes. On commence par démontrer le résultat dans le cas particulier où $r = R$. Ensuite on en déduira le résultat pour tout $r \in]0, R]$ par un argument de changement d'échelle.

Cas $r = R$. Quitte à ajouter une constante à u on peut supposer que

$$\sup_{B(x_0, 2R)} u(x) = - \inf_{B(x_0, 2R)} u(x) = \frac{1}{2} \omega(2R).$$

Posons $M = \omega(2R)/2$ et

$$u_+ = 1 + \frac{u}{M}, \quad u_- = 1 - \frac{u}{M}.$$

Alors u_- et u_+ sont solutions faibles de $Lu_+ = Lu_- = 0$ et de plus ces fonctions sont positives sur $B(x_0, 2R)$. Notons que

$$\begin{aligned} & |\{x \in B(x_0, 2R); u_+ \geq 1\}| + |\{x \in B(x_0, 2R); u_- \geq 1\}| \\ &= |\{x \in B(x_0, 2R); u \geq 0\}| + |\{x \in B(x_0, 2R); u \leq 0\}| \geq |B(x_0, 2R)|. \end{aligned}$$

Par conséquent, soit

$$|\{x \in B(x_0, 2R); u_+ \geq 1\}| \geq \frac{1}{2} |B(x_0, 2R)|,$$

soit

$$|\{x \in B(x_0, 2R); u_- \geq 1\}| \geq \frac{1}{2} |B(x_0, 2R)|.$$

Supposons pour fixer les idées que u_+ vérifie cette condition (sinon on se ramène à ce cas en changeant u en $-u$). Alors l'inégalité d'Harnack donnée par le théorème 14.16 implique que

$$u_+(x) > c \quad \text{dans } B(x_0, R),$$

pour une certaine constante $c > 0$. Par définition de $u_+ = 1 + u/M$ on en déduit que

$$-M(1 - c) \leq u(x) \quad \text{dans } B(x_0, R).$$

Or par définition de M on a aussi $u(x) \leq M$ dans $B(x_0, 2R)$ et *a fortiori* cela reste vrai dans $B(x_0, R)$. Par construction on a $\omega(2R) = 2M$ et on conclut que

$$\begin{aligned} \omega(R) &= \sup_{B(x_0, R)} u - \inf_{B(x_0, R)} u \\ &\leq M - (-M(1 - c)) = 2M - cM = 2M \left(1 - \frac{c}{2}\right) \\ &\leq \gamma \omega(2R) \quad \text{avec } \gamma := \left(1 - \frac{c}{2}\right). \end{aligned}$$

Notons que γ dépend de n, λ, Λ et éventuellement de R . Nous allons voir dans l'étape suivante que γ est en fait indépendante de R .

Cas $r \in]0, R[$. Introduisons

$$\tilde{u}(x) = u \left(x_0 + \frac{r}{R}(x - x_0) \right), \quad \tilde{a}_{ij}(x) = a_{ij} \left(x_0 + \frac{r}{R}(x - x_0) \right).$$

Comme u est une solution faible de $\sum \partial_j (a_{ij} \partial_i u) = 0$, on vérifie directement que \tilde{u} est une solution faible de l'équation $\sum \partial_j (\tilde{a}_{ij} \partial_i \tilde{u}) = 0$. De plus les coefficients \tilde{a}_{ij} vérifient les hypothèses (14.1.1) et (14.1.2) avec les mêmes constantes positives λ et Λ . On peut donc appliquer le résultat de l'étape précédente pour obtenir que

$$\tilde{\omega}(R) = \sup_{B(x_0, 2R)} \tilde{u}(x) - \inf_{B(x_0, 2R)} \tilde{u}(x) \leq \gamma \tilde{\omega}(2R).$$

Or $\tilde{\omega}(R) = \omega(r)$ et $\tilde{\omega}(2R) = \omega(2r)$. On en déduit donc le résultat voulu. \square

Considérons x_0 dans la boule $B(x_1, R/2)$ et considérons maintenant $x \in B(x_0, R)$ avec $x \neq x_0$. Posons $r = |x - x_0|$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-n+1}R > r \geq 2^{-n}R$. On peut alors écrire que

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \sup_{B(x_0, r)} u - \inf_{B(x_0, r)} u = \omega(r) \leq \gamma^{n-1} \omega(2^{n-1}r).$$

De plus, comme $2^{n-1}r \leq R$ on a $\omega(2^{n-1}r) \leq 2 \|u\|_{L^\infty(B(x_0, R))}$ (directement par définition de ω) et donc, d'après l'estimation L^∞ donnée par le lemme 14.20, nous avons

$$\omega(2^{n-1}r) \leq K \|u\|_{L^2(B(x_0, 4R))}.$$

Comme $r \geq 2^{-n}R$ on a $r^\alpha \geq 2^{-n\alpha}R^\alpha$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$. Alors

$$\frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \leq \gamma^{n-1} 2^{n\alpha} R^{-\alpha} K \|u\|_{L^2(B(x_0, 4R))}.$$

On choisit maintenant α tel que $2^\alpha \gamma \leq 1$ (alors $\alpha \in]0, 1/2[$). Alors

$$\frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \leq R^{-\alpha} K \|u\|_{L^2(B(x_0, 4R))},$$

pour tout $x \in B(x_0, R) \setminus \{x_0\}$.

On prend maintenant la borne supérieure lorsque x_0 parcourt $B(x_1, R/2)$, pour obtenir que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x_0, x \in B(x_1, R/2) \\ x_0 \neq x}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} &\leq \sup_{x_0 \in B(x_1, R/2)} \sup_{\substack{x \in B(x_0, R) \\ x \neq x_0}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \\ &\leq \sup_{x_0 \in B(x_1, R/2)} R^{-\alpha} K \|u\|_{L^2(B(x_0, 4R))} \\ &\leq R^{-\alpha} K \|u\|_{L^2(B(x_1, 5R))}. \end{aligned}$$

Comme le lemme 14.20 nous donnait déjà une estimation L^∞ , ceci conclut la démonstration du théorème. □

Chapitre 15

Théorème de Schauder

Nous allons dans ce chapitre développer l'étude de la régularité hölderienne des solutions d'équations elliptiques. Le résultat principal est un théorème classique de Schauder. En combinant ce résultat avec le théorème de De Giorgi, nous en déduisons un résultat de régularité C^∞ pour les surfaces minimales.

15.1 Moyennes locales et équations elliptiques

Un des objectifs de ce chapitre est d'expliquer comment utiliser la notion de moyenne locale pour étudier la régularité des solutions d'équations elliptiques.

Définition. Soit A un sous-ensemble mesurable borné de Ω et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dans toute la suite on utilisera les notations $\mathop{\frown}_A$ et u_A définies par

$$u_A = \mathop{\frown}_A u \, dx = \frac{1}{|A|} \int_A u \, dx.$$

On dit que u_A est la moyenne de u sur A .

Nous avons vu au chapitre 13 que les fonctions harmoniques, c'est-à-dire les fonctions $u \in C^2(\Omega)$ telle que $\Delta u = 0$, vérifient la propriété de la moyenne :

$$u(x) = u_{B(x,r)} \quad \text{pour tout } r \text{ tel que } B(x,r) \subset \Omega.$$

Nous allons dans cette section commencer par voir deux inégalités qui traduisent cet effet de moyennisation pour les solutions d'un problème elliptique à coefficients constants.

Proposition 15.1. *Considérons une matrice A à coefficients constants vérifiant*

$$\exists \lambda > 0 / \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda |\xi|^2 \leq A\xi \cdot \xi.$$

Supposons que $u \in H^2(B(x_0, R))$ est une solution faible de $\operatorname{div}(A\nabla u) = 0$. Alors pour tout $0 < r < R$,

$$(15.1.1) \quad \int_{B(x_0, r)} |u|^2 dx \leq c \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B(x_0, R)} |u|^2 dx,$$

$$(15.1.2) \quad \int_{B(x_0, r)} |u - u_{B(x_0, r)}|^2 dx \leq c \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0, R)} |u - u_{B(x_0, R)}|^2 dx.$$

Démonstration. Démontrons (15.1.1). Par un argument de changement d'échelle élémentaire, il suffit de supposer que $R = 1$ et $r < 1$. Notons que le résultat est trivial si $1/2 \leq r \leq 1$ (en effet, l'inégalité est alors vraie trivialement avec $c = 2^n$ pour toute fonction $u \in L^2$). Considérons le cas $r \leq 1/2$. En écrivant

$$\int_{B(x_0, r)} |u|^2 dx \leq 2^n r^n \sup_{B(x_0, r)} |u|^2 \leq 2^n r^n \sup_{B(x_0, 1/2)} |u|^2,$$

on voit qu'il suffit de montrer que

$$\sup_{B(x_0, 1/2)} |u|^2 \leq C \int_{B(x_0, 1)} |u|^2 dx,$$

ce qui a déjà été vu dans le chapitre précédent (cf le théorème 14.13).

Démontrons (15.1.2). Supposons d'abord que $r < R/2$. Comme A est une matrice constante, on vérifie que $\partial_i u \in H^1(B(x_0, R/2))$ est une solution faible de $\operatorname{div}(A\nabla \partial_i u) = 0$. On peut alors utiliser (15.1.1) avec u remplacée par ∇u , ce qui donne

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^2 dx \leq c_1 \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B(x_0, R/2)} |\nabla u|^2 dx.$$

Par ailleurs nous avons l'inégalité de Poincaré (cf le Théorème 6.41)

$$\int_{B(x_0, r)} |u - u_{B(x_0, r)}|^2 dx \leq c_2 r^2 \int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^2 dx,$$

et l'inégalité de Caccioppoli qui énonce que, pour¹ tout $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{B(x_0, R/2)} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{c_3}{R^2} \int_{B(x_0, R)} |u - c|^2 dx.$$

En utilisant cette inégalité avec $c = u_{B(x_0, R)}$ et en combinant le résultat avec l'inégalité de Poincaré nous trouvons que

$$\int_{B(x_0, r)} |u - u_{B(x_0, r)}|^2 dx \leq c_1 c_2 c_3 \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0, R)} |u - u_{B(x_0, R)}|^2 dx.$$

1. Le fait que l'inégalité soit vraie avec $c \in \mathbb{R}$ quelconque provient simplement du fait que si u est solution de $\operatorname{div}(A\nabla u)$ alors $v = u - c$ est solution de la même équation. Par ailleurs on a $\nabla v = \nabla u$.

Ce qui est le résultat désiré. Il reste à considérer le cas $R/2 \leq r \leq R$. Pour cela commençons par vérifier que $u_{B(x_0,r)}$ est un minimiseur de la fonction

$$m \mapsto \int_{B(x_0,r)} |u(x) - m|^2 dx.$$

Pour le voir, écrivons que

$$\int_{B(x_0,r)} |u - m|^2 dx = \int_{B(x_0,r)} |u|^2 dx - 2m \int_{B(x_0,r)} u dx + m^2 |B(x_0,r)|,$$

donc

$$\frac{d}{dm} \int_{B(x_0,r)} |u - m|^2 dx = 0 \quad \text{pour } m = \int_{B(x_0,r)} u dx$$

et on en déduit le résultat annoncé. Cela implique que (en rappelant que $1/2 \leq r/R \leq 1$)

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,r)} |u(x) - u_{B(x_0,r)}|^2 dx &\leq \int_{B(x_0,r)} |u(x) - u_{B(x_0,R)}|^2 dx \\ &\leq 2^{n+2} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0,R)} |u - u_{B(x_0,R)}|^2 dx. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration. □

15.2 Moyennes locales et espaces de Hölder

Dans la suite on considère un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et on notera $d_\Omega = \sup_{x,y \in \Omega} |x - y|$ le diamètre de Ω .

Rappelons l'inégalité de Jensen.

Lemme 15.2 (Jensen). *Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$, g une fonction μ -intégrable à valeurs dans un intervalle I et soit ϕ une fonction convexe de I dans \mathbb{R} . Alors*

$$\phi\left(\int_X g d\mu\right) \leq \int_X \phi(g) d\mu.$$

En particulier, pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$|u_\Omega|^p \leq \int_\Omega |u|^p dx.$$

La définition des espaces de Campanato fait intervenir un analogue L^p de la variance. Pour motiver cette définition, commençons par étudier

$$J_p(u) = \inf_{m \in \mathbb{R}} \int_\Omega |u - m|^p dx \quad (u \in L^p(\Omega)).$$

Dans la démonstration de la proposition 15.1, nous avons vu que pour $p = 2$ on a

$$J_2(u) = \int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^2 dx.$$

Nous allons voir un résultat analogue pour le cas général $1 \leq p < \infty$.

Lemme 15.3. *Pour tout $1 \leq p < \infty$ on a*

$$J_p(u) \leq \int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^p dx \leq 2^p J_p(u).$$

Démonstration. L'inégalité $J_p(u) \leq \int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^p dx$ est triviale.

Considérons $v \in L^p(\Omega)$. On utilise l'inégalité $|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ pour déduire

$$\int_{\Omega} |v - v_{\Omega}|^p dx \leq 2^{p-1} \int_{\Omega} |v|^p dx + 2^{p-1} \int_{\Omega} |v_{\Omega}|^p dx$$

En notant que

$$\int_{\Omega} |v_{\Omega}|^p dx \leq \int_{\Omega} |v|^p dx$$

(d'après l'inégalité de Jensen) on en déduit que

$$\int_{\Omega} |v - v_{\Omega}|^p dx \leq 2^p \int_{\Omega} |v|^p dx.$$

En appliquant cette inégalité avec $v = u - m$ (alors $v - v_{\Omega} = u - u_{\Omega}$) et en prenant l'infimum pour $m \in \mathbb{R}$ on obtient le résultat désiré. \square

Nous allons maintenant voir le lien entre régularité hölderienne et variance. Pour cela nous allons nous intéresser aux moyennes locales d'une fonction plutôt qu'à ses valeurs ponctuelles. On commence par introduire une notation.

Définition. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$. On note*

$$\Omega(x_0, r) = \Omega \cap B(x_0, r).$$

Si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$f_{x_0, r} = f_{\Omega(x_0, r)} = \int_{\Omega(x_0, r)} f dx.$$

(Notons u la fonction obtenue en prolongeant f par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Alors $f_{x_0, r} = u_{B(x_0, r)}$.)

Lemme 15.4. *Supposons que $f \in C^{0, \alpha}(\Omega)$. Alors pour tout x_0 et tout $r > 0$,*

$$\int_{\Omega(x_0, r)} |f(x) - f_{x_0, r}|^p dx \leq 2^{\alpha p} \|f\|_{C^{0, \alpha}}^p \omega_n r^{n + \alpha p},$$

où ω_n est le volume de la boule unité (noter que l'intégrale du membre de gauche est une intégrale usuelle et pas une valeur moyenne $\int_{\Omega(x_0, r)}$).

Démonstration. Comme

$$f(x) - f_{x_0,r} = \frac{1}{|\Omega(x_0,r)|} \int_{\Omega(x_0,r)} (f(x) - f(y)) \, dy$$

on a

$$|f(x) - f_{x_0,r}| \leq \frac{1}{|\Omega(x_0,r)|} \int_{\Omega(x_0,r)} \|f\|_{C^{0,\alpha}} |x - y|^\alpha \, dy \leq \|f\|_{C^{0,\alpha}} (2r)^\alpha.$$

On conclut en élevant le membre de gauche à la puissance p et en intégrant sur $\Omega(x_0,r)$. \square

Définition (Espaces de Campanato). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $\lambda > 0$, $p \in [1, \infty[$. Une fonction $f \in L^p(\Omega)$ appartient à l'espace de Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ si*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} := \sup_{0 < r} \sup_{x_0 \in \Omega} \left(r^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,r)} |f(x) - f_{x_0,r}|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Le lemme précédent implique que

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,n+\alpha p}(\Omega).$$

L'étude de l'inclusion réciproque est l'objet du théorème de Campanato qui sera démontré à la section suivante.

15.3 Théorème de Campanato

Définition (Domaine Lipschitz). *Un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n est lipschitzien (au sens généralisé) s'il vérifie la propriété suivante : il existe $c_* > 0$ telle que, pour tout $x_0 \in \overline{\Omega}$ et tout $r \in]0, d_\Omega[$,*

$$(15.3.1) \quad |\Omega \cap B(x_0,r)| \geq c_* r^n.$$

Théorème 15.5 (Campanato). *Considérons un ouvert lipschitzien borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire vérifiant la condition (15.3.1). Soit $p \in [1, \infty[$ et soit $\lambda \in]n, n+p]$. Alors*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\lambda - n}{p}.$$

Démonstration. On note par c diverses constantes qui ne dépendent que de p, λ, n et c_* .

Lemme 15.6. *Considérons un ouvert lipschitzien Ω . Soit $x_0 \in \Omega$ et $0 < r < \rho < d_\Omega$. Alors*

$$|f_{x_0,r} - f_{x_0,\rho}| \leq \frac{2}{c_*^{1/p}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} r^{-\frac{n}{p}} \rho^{\frac{\lambda}{p}}.$$

Démonstration. On a

$$c_* r^n |f_{x_0,r} - f_{x_0,\rho}|^p \leq |\Omega(x_0, r)| |f_{x_0,r} - f_{x_0,\rho}|^p = \int_{\Omega(x_0,r)} |f_{x_0,r} - f_{x_0,\rho}|^p dx.$$

En utilisant l'inégalité $|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ on en déduit

$$\begin{aligned} c_* r^n |f_{x_0,r} - f_{x_0,\rho}|^p &\leq 2^{p-1} \left(\int_{\Omega(x_0,r)} |f_{x_0,r} - f(x)|^p dx + \int_{\Omega(x_0,r)} |f(x) - f_{x_0,\rho}|^p dx \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\int_{\Omega(x_0,r)} |f_{x_0,r} - f(x)|^p dx + \int_{\Omega(x_0,\rho)} |f(x) - f_{x_0,\rho}|^p dx \right) \\ &\leq 2^{p-1} \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}^p (r^\lambda + \rho^\lambda) \leq 2^p \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}^p \rho^\lambda, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Soit $R < d_\Omega/2$. Posons $R_i = R/2^i$ pour $i \in \mathbb{N}$ et appliquons l'inégalité du lemme 15.6 avec $r = R_{i+1}$ et $\rho = R_i$. Nous trouvons que

$$|f_{x_0,R_{i+1}} - f_{x_0,R_i}| \leq \frac{2}{c_*^{1/p}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R_{i+1}^{-\frac{n}{p}} R_i^{\frac{\lambda}{p}} = c' 2^{i \frac{n-\lambda}{p}} R^{\frac{\lambda-n}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

Comme $\lambda > n$ la série $\sum 2^{i \frac{n-\lambda}{p}}$ converge et on en déduit que, pour tout $j > i \geq 0$,

$$(15.3.2) \quad |f_{x_0,R_j} - f_{x_0,R_i}| \leq c R_i^{\frac{\lambda-n}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}.$$

Par conséquent $(f_{x_0,R_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Le théorème de différentiation de Lebesgue (cf le corollaire 8.12) implique que cette suite de Cauchy converge vers $f(x_0)$ pour presque tout x_0 dans Ω . Alors, on déduit de (16.1.2) (appliqué avec $i = 0$ et en faisant tendre j vers $+\infty$) que

$$(15.3.3) \quad |f(x_0) - f_{x_0,R}| \leq c \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^\alpha \quad \text{avec } \alpha = \frac{\lambda - n}{p}.$$

Fixons $R > 0$. Comme $x_0 \mapsto f_{x_0,R}$ est bornée (car f appartient à $L^p(\Omega)$), on en déduit que f est aussi bornée. Il reste à prouver que f est α -höldérienne. Etant donnés x, y dans Ω et $R := 2|x - y|$, on cherche à estimer $|f(x) - f(y)|$ en fonction de R^α . D'après (15.3.3)

On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{x,R}| + |f_{x,R} - f_{y,R}| + |f_{y,R} - f(y)| \\ &\leq 2c \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^\alpha + |f_{x,R} - f_{y,R}|, \end{aligned}$$

et il reste seulement à estimer $|f_{x,R} - f_{y,R}|$. Pour cela on écrit que

$$\begin{aligned} c_* 2^{-n} R^n |f_{x,R} - f_{y,R}|^p &\leq \int_{\Omega(y,R/2)} |f_{x,R} - f_{y,R}|^p ds \\ &\leq 2^{p-1} \left(\int_{\Omega(x,R)} |f(s) - f_{x,R}|^p ds + \int_{\Omega(y,R)} |f(s) - f_{y,R}|^p ds \right) \\ &\leq 2^p \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}}^p R^\lambda, \end{aligned}$$

d'où

$$|f_{x,R} - f_{y,R}| \leq c \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^{\frac{\lambda-n}{p}} = c \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} R^\alpha,$$

En rappelant que $R = 2|x - y|$ et en combinant les identités précédentes, on a montré que

$$|f(x) - f(y)| \leq c \|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} |x - y|^\alpha,$$

ce qui conclut la démonstration. \square

15.4 Théorème de Schauder

Théorème 15.7 (Schauder). *Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de l'équation $\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0$ où $A \in C^{0,\alpha}$ est une matrice symétrique vérifiant*

$$\exists \lambda > 0 / \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq c_0 |\xi|^2.$$

Alors $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$ et pour tout compact $F \subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(F)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Démonstration. Fixons un ensemble borné $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. On fait cette hypothèse pour garantir qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x, r_0) \subset \Omega$ pour tout $x \in K$.

Lemme 15.8. *Soit $\lambda \in]0, n[$. Il existe $R_0 > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in K$,*

$$(15.4.1) \quad \sup_{0 < r < R_0} r^{-\lambda} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^2 dx < +\infty.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in K$. Nous utilisons la méthode de Korn dont l'idée est de se ramener à un problème à coefficients constants au voisinage de x_0 . Pour cela on écrit

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \operatorname{div}(A(x_0)\nabla u) + \operatorname{div}((A(x) - A(x_0))\nabla u).$$

On en déduit que

$$\operatorname{div}(A(x_0)\nabla u) = \operatorname{div}((A(x_0) - A(x))\nabla u).$$

On décompose alors u comme la solution de deux problèmes distincts : $u = v + w$ où

i) v l'unique solution de

$$\operatorname{div}(A(x_0)\nabla v) = 0 \text{ dans } B(x_0, R), \quad v|_{\partial B(x_0, R)} = u|_{\partial B(x_0, R)}.$$

Le point clé est que l'on peut appliquer la proposition 15.1, car v est solution d'une équation à coefficients constants. Alors

$$(15.4.2) \quad \int_{B(x_0, r)} |\nabla v|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B(x_0, R)} |\nabla v|^2 dx.$$

La constante C ne dépend que de la norme de $A(x_0)$, qui est bornée sur K .

ii) Par ailleurs $w = u - v$ est solution de

$$\operatorname{div}(A(x_0)\nabla w) = \operatorname{div}((A(x_0) - A(x))\nabla u), \quad w|_{\partial B(x_0, R)} = 0.$$

Le point clé est que le terme source est petit car $|A(x_0) - A(x)| = O(|x_0 - x|^\alpha)$ par hypothèse sur A . On en déduira plus loin que

$$(15.4.3) \quad \|\nabla w\|_{L^2(B(x_0, R))} \leq CR^\alpha \|\nabla u\|_{L^2(B(x_0, R))}.$$

Fixons $0 < R \leq \min\{1, d_\Omega\}$. On veut comparer ∇u et ∇v . La première observation est la suivante : comme $u - v$ appartient à $H_0^1(B(x_0, R))$ la formulation faible de $\operatorname{div}(A(x_0)\nabla v) = 0$ donne

$$\int_{B(x_0, R)} A(x_0)\nabla v \cdot \nabla(v - u) = 0,$$

donc

$$\int_{B(x_0, R)} A(x_0)\nabla v \cdot \nabla v \, dx = \int_{B(x_0, R)} A(x_0)\nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'ellipticité de $A(x_0)$, on en déduit que

$$c_0 \int_{B(x_0, R)} |\nabla v|^2 \, dx \leq \|A(x_0)\|^2 \int_{B(x_0, R)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

L'inégalité (15.4.2) implique alors que

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla v|^2 \, dx \leq C' \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B(x_0, R)} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité $|x + y|^2 \leq 2|x|^2 + 2|y|^2$ pour x, y dans \mathbb{R}^n ,

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^2 \, dx \leq 2 \int_{B(x_0, r)} |\nabla v|^2 \, dx + 2 \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx.$$

En combinant les deux inégalités précédentes on en déduit que, pour tout $0 < r < R$,

$$(15.4.4) \quad \int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^2 \, dx \leq C' \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B(x_0, R)} |\nabla u|^2 \, dx + 2 \int_{B(x_0, R)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx.$$

Nous allons maintenant estimer la contribution du terme $\int_{B(x_0, R)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx$. Pour cela rappelons que, par construction, $u - v \in H_0^1(B(x_0, R))$. La formulation faible des équations $\operatorname{div}(A(x_0)\nabla v) = 0$ et $\operatorname{div}(A\nabla u) = 0$ entraîne que

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, R)} A(x_0)\nabla v \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx &= 0, \\ \int_{B(x_0, R)} A(x)\nabla u \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Ecrivons alors

$$\begin{aligned}
& c_0 \int_{B(x_0, R)} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \\
& \leq \int_{B(x_0, R)} A(x_0) \nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v) dx \\
& = \underbrace{\int_{B(x_0, R)} A(x_0) \nabla v \cdot (\nabla v - \nabla u) dx}_{=0} + \int_{B(x_0, R)} A(x_0) \nabla u \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \\
& = \underbrace{\int_{B(x_0, R)} A(x) \nabla u \cdot (\nabla u - \nabla v) dx}_{=0} + \int_{B(x_0, R)} (A(x_0) - A(x)) \nabla u \cdot (\nabla u - \nabla v) dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \leq \frac{\|A - A(x_0)\|_{L^\infty(B(x_0, R))}}{c_0} \|\nabla u\|_{L^2(B(x_0, R))} \|\nabla u - \nabla v\|_{L^2(B(x_0, R))}$$

d'où

$$\|\nabla u - \nabla v\|_{L^2(B(x_0, R))} \leq CR^\alpha \|\nabla u\|_{L^2(B(x_0, R))},$$

ce qui implique, évidemment,

$$(15.4.5) \quad \|\nabla u - \nabla v\|_{L^2(B(x_0, R))}^2 \leq C^2 R^{2\alpha} \|\nabla u\|_{L^2(B(x_0, R))}^2.$$

Introduisons la fonction $f: [0, R] \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(r) = r^{-\lambda} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^2 dx.$$

On déduit de (15.4.4) et (15.4.5) que

$$f(r) \leq C \left(\left(\frac{r}{R} \right)^{n-\lambda} + \left(\frac{r}{R} \right)^{-\lambda} R^{2\alpha} \right) f(R).$$

Comme $\alpha > 0$ et $\lambda < n$ par hypothèses, il existe deux nombres réels $0 < \theta$ et $0 < R_1$ tels que si $r/R \leq \theta$ et $R \leq R_1$ on ait

$$C \left(\left(\frac{r}{R} \right)^{n-\lambda} + \left(\frac{r}{R} \right)^{-\lambda} R^{2\alpha} \right) \leq 1.$$

Alors $f(r) \leq f(R)$ pour tout $(r, R) \in [0, \theta R_1] \times [0, R_1]$ d'où bien sûr $f(r) \leq f(R_1)$ pour tout $r \leq R_0 = \theta R_1$. Comme $f(R_1) < +\infty$, ceci conclut la démonstration. \square

Lemme 15.9. Soit $\lambda \in]0, n]$. S'il existe $R_0 > 0$ tel que

$$(15.4.6) \quad \sup_{x_0 \in K} \sup_{0 < r < R_0} r^{-\lambda} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^2 dx < +\infty,$$

alors il existe $R_1 > 0$ tel que

$$\sup_{x_0 \in K} \sup_{0 < r < R_1} r^{-\lambda-2\alpha} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 dx < +\infty,$$

où l'on a noté $(\nabla u)_r$ la moyenne de ∇u sur la boule de centre x_0 et de rayon r .

Démonstration. Soit $x_0 \in K$. Quitte à diagonaliser $A(x_0)$ et à faire un changement de variables, on peut supposer que $A(x_0)$ est la matrice identité. Comme dans la démonstration du lemme précédent, nous allons commencer par montrer que, pour tout $0 < r < R$,

$$(15.4.7) \quad \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0, R)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 dx \\ + C \int_{B(x_0, R)} |\nabla u - \nabla v|^2 dx,$$

où v est comme précédemment. Pour cela on écrit (cf la proposition 15.1)

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla v - (\nabla v)_r|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0, R)} |\nabla v - (\nabla v)_R|^2 dx.$$

En utilisant le résultat déjà vu

$$\int_{B(x_0, r)} |f - (f)_r|^2 dx = \inf_{m \in \mathbb{R}} \int_{B(x_0, r)} |f - m|^2 dx$$

on en déduit que

$$(15.4.8) \quad \int_{B(x_0, r)} |\nabla v - (\nabla v)_r|^2 dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0, R)} |\nabla v - (\nabla v)_R|^2 dx.$$

Nous allons maintenant comparer

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla v - (\nabla u)_R|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{B(x_0, R)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 dx$$

en utilisant le fait que $\Delta v = 0$ dans $B(x_0, R)$ et le fait que $u - v \in H_0^1(B(x_0, R))$ peut être utilisée comme fonction test. Ecrivons

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla v - (\nabla u)_R|^2 dx = \int_{B(x_0, R)} (\nabla v - (\nabla u)_R) \cdot (\nabla u - (\nabla u)_R) dx \\ + \int_{B(x_0, R)} (\nabla v - (\nabla u)_R) \cdot \nabla(v - u) dx.$$

Nous allons voir que le second terme du membre de droite s'annule. En effet, sur la formulation faible de $\Delta v = 0$ nous voyons que

$$\int_{B(x_0, R)} \nabla v \cdot \nabla(v - u) dx = 0.$$

Par ailleurs, $\int_{B(x_0, R)} (\nabla u)_R \cdot \nabla(v - u) \, dx = 0$ en intégrant par parties (en utilisant encore que $u - v \in H_0^1(B(x_0, R))$) et que $\nabla(\nabla u)_R = 0$. L'annulation du second terme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne directement

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla v - (\nabla u)_R|^2 \, dx \leq \int_{B(x_0, R)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx.$$

En combinant cette inégalité avec (15.4.8) on trouve

$$(15.4.9) \quad \int_{B(x_0, r)} |\nabla v - (\nabla v)_r|^2 \, dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0, R)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx.$$

Finalement on a

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \, dx &\leq 3 \int_{B(x_0, r)} |\nabla v - (\nabla v)_r|^2 \, dx \\ &\quad + 3 \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx \\ &\quad + 3 \int_{B(x_0, r)} |(\nabla u)_r - (\nabla v)_r|^2 \, dx. \end{aligned}$$

La dernière expression est contrôlée par l'inégalité de Jensen :

$$\int_{B(x_0, r)} |(\nabla u)_r - (\nabla v)_r|^2 \, dx \leq \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx.$$

En combinant ce qui précède on obtient le résultat voulu (15.4.7).

On utilise alors l'inégalité (15.4.3) pour estimer $\nabla(u - v)$ puis l'hypothèse (15.4.6) pour obtenir

$$(15.4.10) \quad \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \, dx \leq C \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B(x_0, R)} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 \, dx + C_\lambda R^{\lambda+2\alpha},$$

pour $r \leq R_0$. Introduisons la fonction

$$F(r) = r^{-\lambda-2\alpha} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \, dx$$

Alors,

$$F(\theta r) \leq C\theta^{n+2-\lambda-2\alpha} F(R) + C_{\lambda, \theta}$$

pour tout $0 < \theta < 1$ et tout $R \leq R_0$. On choisit alors θ pour que $C\theta^{n+2-\lambda-2\alpha} = 1/2$ et on en déduit que

$$r^{-\lambda-2\alpha} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \, dx \leq C_\lambda$$

pour $0 < r \leq R_1$. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème. Considérons $z \in \Omega$ et $\theta > 0$ tel que $B(z, \theta) \subset \Omega$. Nous allons démontrer que ∇u appartient à $C^{0,\alpha}(B(z, \theta/2))$, ce qui conclura la démonstration.

Notons B la boule $B(z, \theta)$ incluse dans Ω . Le lemme 15.8 implique que l'hypothèse (15.4.6) du lemme 15.9 est vérifiée pour tout $\lambda \in]0, n[$. On déduit du lemme 15.9 qu'il existe $R_1 > 0$ tel que

$$\sup_{x_0 \in B} \sup_{0 < r < R_1} r^{-\lambda-2\alpha} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 dx < +\infty.$$

Par ailleurs, pour toute fonction u telle que ∇u appartient à $L^2(\Omega)$, on montre aisément que

$$\sup_{x_0 \in B} \sup_{R_1 \leq r} r^{-\lambda-2\alpha} \int_{\Omega(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 dx < +\infty.$$

Il suit que ∇u appartient à l'espace de Campanato $\mathcal{L}^{2, \lambda+2\alpha}(B)$. On choisit alors λ tel que $\lambda > n - 2\alpha$. On déduit alors du théorème de Campanato que $\nabla u \in C^{0,\beta}(B)$ avec

$$\beta = \frac{\lambda + 2\alpha - n}{2}.$$

Alors $\nabla u \in C^{0,\beta}(B)$ pour tout $\beta < \alpha$ et *a fortiori* $\nabla u \in L^\infty(B)$. Comme $B = B(z, \theta)$, le fait que $\nabla u \in L^\infty(B)$ implique de façon immédiate que

$$\sup_{x_0 \in B(z, \theta/2)} \sup_{0 < r < \theta/2} r^{-n} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u|^2 dx \leq 2^n \|\nabla u\|_{L^\infty(B)}^2.$$

L'hypothèse (15.4.6) du lemme 15.9 est donc vérifiée avec $\lambda = n$. Le lemme 15.9 s'applique et donne qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$\sup_{x_0 \in B(z, \theta/2)} \sup_{0 < r < \varepsilon_1} r^{-n-2\alpha} \int_{B(x_0, r)} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 dx < +\infty.$$

Comme précédemment on en déduit que ∇u appartient à $\mathcal{L}^{2, n+2\alpha}(B(z, \theta/2))$. Donc, grâce au théorème de Campanato, on peut conclure que $\nabla u \in C^{0,\alpha}(B(z, \theta/2))$. Ce qui est le résultat voulu. La démonstration est terminée. \square

La démonstration précédente permet de considérer le cas d'une équation avec terme source et on a le résultat suivant.

Théorème 15.10. *Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de l'équation*

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \operatorname{div} F$$

où $A \in C^{0,\alpha}$ est une matrice elliptique symétrique et $F \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$. Alors $\nabla u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$.

15.5 Régularité H^2

Les lemmes que nous avons démontrés pour étudier la régularité elliptique concernent tous des inégalités pour des fonctions $u \in H^1(\Omega)$. Nous aurons besoin de savoir que l'on peut appliquer ces inégalités pour ∇u au lieu de u . Pour cela nous allons énoncer dans cette section un résultat de régularité H^2 à l'intérieur de Ω (loin du bord).

Commençons par une observation élémentaire.

Lemme 15.11. *Si $v \in C_0^3(\Omega)$ alors la norme L^2 du laplacien de v contrôle la norme L^2 de toutes les dérivées secondes de v :*

$$\|D^2v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Démonstration. En intégrant par parties on trouve

$$\begin{aligned} \|D^2v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\partial_i \partial_j v)^2 \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\partial_j v)(\partial_i^2 \partial_j v) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\partial_j^2 v)(\partial_i^2 v) \, dx = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat désiré. □

Le résultat suivant est beaucoup plus fort. Il correspond au lemme précédent mais :

- il s'applique pour des solutions faibles (H^1 et pas C^3) ;
- il n'y a pas besoin de faire une hypothèse sur le comportement au bord ;
- il est vrai pour des opérateurs à coefficients variables, comme

$$\operatorname{div}(A\nabla \cdot) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j \cdot),$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice elliptique (telle que $A \in L^\infty(\Omega)$ et $\langle A\xi, \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2$ pour une certaine constante $\lambda > 0$).

Théorème 15.12. *Soit Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^n et soit $f \in L_{loc}^2(\Omega)$. Considérons une matrice elliptique $A \in C_{loc}^{0,1}(\Omega)$ et $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ solution faible de $\operatorname{div}(A\nabla u) = f$. Alors pour tout $\Omega'' \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$ il existe une constante c telle que*

$$\int_{\Omega''} |\nabla^2 u|^2 \, dx \leq c \int_{\Omega'} (|u|^2 + |f|^2) \, dx.$$

La démonstration est un très bon exercice. Nous allons en donner les grandes lignes et, exceptionnellement, laisser les détails au lecteur.

La démonstration est basée sur l'inégalité de Caccioppoli et la méthode de Nirenberg. L'idée de Nirenberg est de considérer des dérivées partielles discrètes. Etant donné $y \in \mathbb{R}^n$, nous introduisons l'opérateur Δ_y défini sur $L^2(\Omega)$ par

$$\Delta_y u(x) = \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|}.$$

Les propriétés élémentaires de la différentiation des fonctions sont encore vraies : la règle de Leibniz

$$\Delta_y(ab) = (\tau_y a)\Delta_y b + (\Delta_y a)b,$$

et l'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \varphi(x)\Delta_y u(x) dx = - \int_{\Omega} u(x)(\Delta_{-y}\varphi)(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega), \quad |y| < \text{dist}(\text{supp } \varphi, \partial\Omega).$$

On peut alors démontrer le lemme suivant, puis l'appliquer pour conclure la démonstration.

Lemme 15.13. *Soit $u \in L_{loc}^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Alors $\nabla u \in L_{loc}^p(\Omega)$ si et seulement si, pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ telle que,*

$$\forall y \in B(0,1) \setminus \{0\}, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega'), \quad \left| \int_{\Omega'} (\Delta_y u)\varphi dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega')}.$$

où $1/p + 1/p' = 1$.

15.6 Régularité des surfaces minimales

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe et $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée régulière. Introduisons l'espace affine

$$H_g^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = g\}.$$

Considérons une fonction $u \in H_g^1(\Omega)$. On note $S(u)$ la surface

$$S(u) = \{(x, u(x)) : x \in \Omega\},$$

et $A(u)$ l'aire de $S(u)$, définie par

$$A(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

Définition. *Soit $u \in H_g^1(\Omega)$. On dit que $S(u)$ est une surface minimale si*

$$A(u) = \inf_{v \in H_g^1(\Omega)} A(v).$$

Le résultat principal de ce chapitre énonce qu'une surface minimale est de classe C^∞ à l'intérieur de son domaine de définition. Pour obtenir ce résultat, nous commençons par la proposition suivante.

Proposition 15.14. *i) Soit $u \in H_g^1(\Omega)$. Si $S(u)$ est une surface minimale alors*

$$H(u) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

au sens où

$$(15.6.1) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx = 0.$$

ii) Si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ est solution de (15.6.1) alors $u \in H_{loc}^2(\Omega)$ et, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$(15.6.2) \quad \operatorname{div}(A \nabla \partial_k u) = 0$$

où $A = (\partial_i \partial_j F(\nabla u))_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $F(\zeta) = \sqrt{1 + |\zeta|^2}$.

Démonstration. i) Considérons la fonction $\theta: t \mapsto A(u + t\varphi)$, définie pour $t \in [-1, 1]$.

Alors $\theta(t) = \int_{\Omega} f(t, x) dx$ avec $f = \sqrt{1 + |\nabla u + t \nabla \varphi|^2}$. On a

$$|\partial_t f| = \left| \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi + t |\nabla \varphi|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u + t \nabla \varphi|^2}} \right| \leq |\nabla u| |\nabla \varphi| + |\nabla \varphi|^2 \in L^1(\Omega),$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On peut alors appliquer le théorème de dérivation de Lebesgue qui implique que θ est dérivable. On obtient l'équation (15.6.1) en écrivant que si u est un minimiseur on a $\theta'(0) = 0$.

ii) Posons $G(\zeta) = \nabla_{\zeta} \sqrt{1 + |\zeta|^2} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + |\zeta|^2}}$ de sorte que l'équation (15.6.1) s'écrive

$$\int_{\Omega} G(\nabla u) \cdot \nabla \varphi dx = 0.$$

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et h tel que $|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \partial\Omega)$. Alors

$$\int_{\Omega} (F(\nabla u(x + he_k)) - F(\nabla u(x))) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0.$$

Notons G^i les coordonnées de G (donc $G = (G^1, \dots, G^n)$) et écrivons

$$G^i(\nabla u(x + he_k)) - G^i(\nabla u(x)) = \sum_{j=1}^n c_{ij}^h(x) (\partial_j u(x + he_k) - \partial_j u(x)).$$

où

$$c_{ij}^h(x) = \int_0^1 (\partial_{\zeta_j} G^i) \left(t \nabla u(x + h e_k) + (1-t) \nabla u(x) \right) dt.$$

On obtient que

$$\Delta_{h e_k} u = \frac{1}{h} \left(u(x + h e_k) - u(x) \right)$$

vérifie

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} c_{ij}^h(x) \partial_j (\Delta_{h e_k} u) \partial_i \varphi \, dx = 0.$$

Nous allons voir maintenant que la matrice $(c_{ij}^h(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ est elliptique, uniformément en h . Nous devons montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout h , tout ξ et tout x , on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij}^h(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2.$$

En dérivant G on calcule que

$$\partial_{\zeta_j} G^i(\zeta) = \frac{\delta_i^j}{\sqrt{1 + |\zeta|^2}} - \frac{\zeta_i \zeta_j}{(1 + |\zeta|^2)^{3/2}}.$$

Posons $Y(t, x) = t \nabla u(x + h e_k) + (1-t) \nabla u(x)$. Alors

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij}^h(x) \xi_i \xi_j = \int_0^1 \frac{(1 + |Y(t, x)|^2) |\xi|^2 - (Y(t, x) \cdot \xi)^2}{(1 + |Y(t, x)|^2)^{3/2}} dt.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(1 + |Y(t, x)|^2) |\xi|^2 - (Y(t, x) \cdot \xi)^2 = |\xi|^2 + \left[|Y(t, x)|^2 |\xi|^2 - (Y(t, x) \cdot \xi)^2 \right] \geq |\xi|^2,$$

donc

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij}^h(x) \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2 \int_0^1 \frac{1}{(1 + |Y(t, x)|^2)^{3/2}} dt.$$

Maintenant on utilise que, par hypothèse, $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$. Cela implique que $(1 + |Y(t, x)|^2)^{-\frac{3}{2}}$ est minoré par une constante positive et donc c est une matrice elliptique, uniformément en h . On peut alors appliquer (la démonstration de) l'inégalité de Caccioppoli. Considérons $\Omega'' \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$ avec $|h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. On peut estimer la norme $H^1(\Omega'')$ de $\Delta_{h e_k} u$ en fonction de la norme $L^2(\Omega')$ de $\Delta_{h e_k} u$ qui est elle-même contrôlée par la norme $L^2(\Omega)$ de ∇u . On en déduit alors que u appartient à $H^2(\Omega'')$ et que l'on a l'équation désirée (cf le Lemme 15.13). \square

On peut maintenant démontrer le résultat suivant.

Théorème 15.15. *Si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifie $H(u) = 0$, alors $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. $u \in H_{loc}^2(\Omega)$ et de plus $\operatorname{div}(A\nabla\partial_k u) = 0$. Comme $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$, la matrice A vérifie les hypothèses du théorème de De Giorgi, qui implique que $\partial_k u$ appartient à $C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ pour tout k et par conséquent $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$. Alors on en déduit que A est à coefficients $C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$. Le théorème de Schauder implique alors que $\partial_k u \in C_{loc}^{1,\alpha}$ pour tout k . On en déduit alors que $u \in C_{loc}^{2,\alpha}$. On peut dériver l'équation et vérifier que $\partial_j \partial_k u$ vérifie une équation du même type (avec un terme source et on utilise le théorème 15.10). Le théorème de Schauder entraîne que $u \in C_{loc}^{3,\alpha}$. En raisonnant par récurrence on obtient le résultat désiré. \square

Chapitre 16

Estimations dispersives

Ce chapitre est composé de deux parties bien distinctes. Nous commençons par une introduction à l'étude du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire. Nous énoncerons de nombreux résultats sans démonstration pour essayer de donner un aperçu de résultats récents dans ce domaine. Cela nous permettra d'introduire les estimations de Strichartz-Bourgain. Dans la deuxième partie, nous démontrerons une de ces estimations. La démonstration, même si elle est très difficile, est intéressante d'un point de vue pédagogique car elle repose sur des idées différentes de celles utilisées dans les autres chapitres. De plus cette démonstration donne un aperçu des méthodes utilisées actuellement dans l'étude des problèmes non linéaires.

16.1 L'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u = 0,$$

résolue par la transformée de Fourier, génère un groupe continu d'opérateurs $e^{it\Delta}$, qui sont unitaires sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 16.1. *Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition $S(t) = e^{it\Delta}$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $e^{-it|\xi|^2}$, tel que*

$$\widehat{S(t)u_0}(\xi) = e^{-it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'opérateur $S(t)$ est une isométrie de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. De plus on a $S(t) \circ S(s) = S(t+s)$ pour tout t, s dans \mathbb{R} .

Il est donc très facile de résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger linéaire dans les espaces de Sobolev. On pourrait se demander si un résultat analogue est

vrai dans d'autres espaces. La proposition suivante montre que l'opérateur $S(t)$ est non borné sur les espaces de Hölder (et même sur les espaces Zygmund définis dans la dernière section du chapitre précédent).

Proposition 16.2. *Soit $s, \sigma \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $t_0 \neq 0$ tel que $S(t_0)$ est continu de $C_*^\sigma(\mathbb{R}^n)$ dans $C_*^s(\mathbb{R}^n)$. Alors $s \leq \sigma - n$.*

En fait, l'opérateur $S(t)$ est non borné sur tous les espaces de Sobolev

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = (I - \Delta)^{-s/2} L^p(\mathbb{R}^n)$$

construits sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $p \neq 2$. Ce qui explique pourquoi il est naturel de chercher une solution, continue en temps, à valeurs dans un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ construit sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire. Etant donnée une donnée initiale u_0 on cherche une solution u du problème

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \quad , \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Une première difficulté est de donner un sens à l'équation. On dit que u est une solution de l'équation de Schrödinger non linéaire de donnée initiale u_0 si

$$(16.1.1) \quad u(t) = S(t)u_0 - i \int_0^t S(t-t') (|u(t')|^2 u(t')) dt'.$$

Cette identité est appelée formule de Duhamel. Pour que cette formule ait un sens, il faut trouver un cadre qui est tel que la non linéarité $|u|^2 u$ est à valeurs dans un espace de Sobolev. C'est la raison pour laquelle l'étude du problème de Cauchy dépend très fortement de la régularité de la donnée initiale.

La situation la plus simple est celle où u est continue en temps à valeurs dans un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > n/2$. En effet, dans ce cas, on sait que $H^s(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach : le produit de deux éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ si $s > n/2$. La formule précédente a donc un sens clair et on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 16.3. *Soit $n \geq 1$, $\sigma \in \mathbb{N}$ et $s > n/2$. Pour toute donnée initiale $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, il existe $T > 0$ tel qu'il existe une unique fonction $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^n))$ vérifiant*

$$u(t) = S(t)u_0 - i \int_0^t S(t-t') (|u(t')|^2 u(t')) dt'.$$

Notons T^* le temps de vie de la solution maximale. Alors, soit la solution maximale est définie pour tout temps, soit

$$\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty.$$

La démonstration de cette proposition repose sur le théorème du point fixe, le fait que le produit de deux éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ si $s > n/2$. Le critère d'explosion est une conséquence de l'injection de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour $s > n/2$.

Il est naturel de chercher à étendre ce résultat en considérant des données initiales moins régulières, appartenant à des espaces de Sobolev d'indice $s \leq n/2$. Il y a plusieurs motivations. D'abord, un tel résultat donne des informations sur la nature des éventuelles singularités. Aussi, afin d'obtenir des résultats d'existence globale en temps, il est paradoxalement plus facile de travailler dans des espaces de faible régularité associés à une invariance d'échelle ou à la conservation des quantités naturelles (masse et énergie). Introduisons la masse M et de l'énergie E définies par

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^2 dx,$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^4 dx.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}M(t) = 0, \quad \frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

Par exemple, pour $n = 1$, pour résoudre globalement en temps le problème de Cauchy dans la classe des fonctions C^∞ , on utilise l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ qui permet de montrer dans un premier temps que le problème de Cauchy est globalement bien posé dans $H^1(\mathbb{R})$.

Proposition 16.4. *Supposons que $n = 1$. Pour toute donnée initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}))$ de (16.1.1).*

On montre ensuite un résultat de propagation de la régularité.

Proposition 16.5. *Soit $u \in C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}))$ une solution de (16.1.1). Si $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s > 1$, alors $u \in C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}))$.*

En combinant les deux propositions précédentes, on obtient que

Corollaire 16.6. *Supposons que $n = 1$. Soit $s \geq 1$. Pour toute donnée initiale $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}))$ de (16.1.1).*

En dimension 2, $H^1(\mathbb{R}^2) \not\subset L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et le problème est plus difficile. Cependant, le défaut d'injection est faible et on dispose de l'estimation logarithmique

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \left(\log \left(1 + \frac{\|f\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}}{\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}} \right) \right)^{1/2}.$$

Cette estimation a permis à Brézis et Gallouët de démontrer que le problème de Cauchy pour l'équation cubique défocalisante est globalement bien posé dans $H^2(\mathbb{R}^2)$. Cette méthode d'analyse fonctionnelle ne permet cependant pas de traiter le cas de non linéarités d'ordre supérieure, ni de considérer des données dans l'espace d'énergie, c'est-à-dire pour une donnée initiale appartenant à $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Dès la dimension 2, pour résoudre le problème de Cauchy dans des espaces de faible régularité, on doit utiliser une propriété fondamentale de l'équation. Précisément, le fait qu'il s'agit d'une équation dispersive, ce qui signifie que la variété caractéristique de l'équation libre est courbée. Cela entraîne les inégalités de dispersion et de Strichartz.

Théorème 16.7. *Pour tout triplet (n, p, q) vérifiant*

$$\frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}, \quad (p, q) \neq (2, +\infty), \quad p \geq 2,$$

il existe une constante $C(p, q, n)$ telle que

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}_+; L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C(p, q, n) \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Strichartz avait prouvé l'estimation pour $(n, p, q) = (2, 4, 4)$. Keel et Tao ont obtenu le cas limite $(p, q) = (2, 2n/(n-2))$ pour $n \geq 3$. Les autres estimations sont dues à Ginibre et Velo ainsi qu'à Yajima.

Les estimations de Strichartz donnent une amélioration par rapport à l'injection de Sobolev qui peut être vue comme un gain de dérivée, ce qui explique que ces estimations sont à l'origine d'une amélioration très nette de la compréhension du problème de Cauchy.

Définition 16.8. *Soit $s \geq 0$ et $n \geq 1$. On dit que le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire est bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ si, pour toute boule ouverte B de $H^s(\mathbb{R}^n)$, il existe un temps $T > 0$ et un espace de Banach $X_T^s \hookrightarrow C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$ tels que*

1. *pour tout $v \in X_T^s$ la fonction $|v|^2 v$ est bien défini et appartient à $L^1(]0, T[; H^s(\mathbb{R}^n))$;*
2. *pour tout $u_0 \in B$, il existe une unique solution $u \in X_T^s$ de l'équation*

$$u(t) = S(t)u_0 - i \int_0^t S(t-t') (|u(t')|^2 u(t')) dt'.$$

3. *Si $u_0 \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ pour un $\sigma > s$, alors $u \in C^0([0, T]; H^\sigma(\mathbb{R}^n))$.*

On dit parfois pour clarifier l'énoncé que le problème de Cauchy est bien posé localement en temps. On dit que le problème de Cauchy est globalement bien posé si le résultat précédent est vrai pour tout $T > 0$.

Théorème 16.9. *Supposons que $n = 2$. Le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire est globalement bien posé sur $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

La démonstration des inégalités de Strichartz repose sur un argument d'interpolation appliqué d'une part avec l'inégalité

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

(qui est en fait une égalité) et d'autre part avec

$$(16.1.2) \quad \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{K}{t^{n/2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Nous avons déjà vu la première inégalité (qui est en fait une égalité). La seconde égalité s'obtient par un calcul direct de la solution fondamentale, qui s'écrit :

$$(e^{it\Delta}u_0)(x) = \frac{1}{(i\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i|x-y|^2/(2t)} u_0(y) dy.$$

Considérons maintenant le même problème mais dans le cas où la donnée initiale u_0 et la solution u sont des fonctions périodiques en la variable spatiale x .

Définition 16.10 (Espaces de Sobolev périodiques). *On note $L^2(\mathbb{T}^n)$ l'espace des fonctions $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ qui sont 2π -périodiques par rapport à chaque variable, ce qui est équivalent à $u(\cdot + \gamma) = u$ pour tout $\gamma \in (2\pi\mathbb{Z})^n$. Rappelons que les fonctions $u \in L^2(\mathbb{T}^n)$ se représentent en série de Fourier (voir le théorème 5.1)*

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ik \cdot x}.$$

Soit $s \in [0, +\infty[$. Par définition

$$H^s(\mathbb{T}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}^n); \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |c_k|^2 < +\infty \right\}.$$

Remarque 16.11. Si $s \in \mathbb{N}$, alors on a

$$H^s(\mathbb{T}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^n); \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq s, \partial_x^\alpha u \in L^2(\mathbb{T}^n)\},$$

où ∂_x^α désigne la dérivée au sens faible de u (cf les définitions 6.1 et 6.5).

Les résultats qui sont basés uniquement sur des arguments d'analyse fonctionnelle ou d'analyse de Fourier sont encore vrais. Par exemple, si $s > n/2$, le problème de Cauchy est bien posé sur $H^s(\mathbb{T}^n)$. Mais on ne dispose plus de l'estimation de dispersion (16.1.2). En effet, on a

$$1 \lesssim \|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \lesssim \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}.$$

Ce qui montre que, si $u_0 \in L^1(\mathbb{T}^n)$ est non nul, alors $\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$ ne peut pas tendre vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Donc l'inégalité (16.1.2) ne peut pas être vraie pour tout t grand. En fait l'obstruction est beaucoup plus profonde.

Proposition 16.12. *Pour tout $t \geq 0$, $S(t)$ n'envoie pas $L^1(\mathbb{T}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{T}^n)$.*

Toutefois, on dispose d'un analogue des inégalités de Strichartz, ce qui a permis à Bourgain de montrer que le problème de Cauchy est bien posé y compris pour des données initiales qui sont périodiques.

Théorème 16.13. *Si $n = 2$ ou $n = 3$, alors le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire est bien posé sur $H^1(\mathbb{T}^n)$ localement en temps.*

16.2 Estimée de Strichartz-Bourgain pour KdV

Considérons maintenant l'équation de Korteweg-de-Vries

$$(16.2.1) \quad u_t + u_{xxx} + uu_x = 0.$$

Un résultat majeur de Bourgain est que le problème de Cauchy pour cette équation est globalement bien posé sur $L^2(\mathbb{T})$. Nous allons voir dans cette section un élément de la démonstration. L'idée est d'introduire des espaces dont la définition est basée sur l'étude du groupe $(e^{-t\partial_{xxx}})_{t \in \mathbb{R}}$ associé à l'équation linéaire $u_t + u_{xxx} = 0$.

Considérons une solution $u = u(t, x)$ 2π -périodique en t et en x de l'équation linéaire $u_t + u_{xxx} = 0$. Considérons sa transformée de Fourier, définie par,

$$\tilde{u}(\tau, k) = \iint_{\mathbb{T}^2} e^{-it\tau - ikx} u(t, x) dx dt \quad (\tau, k \in \mathbb{Z}).$$

Alors \tilde{u} est supportée dans la variété caractéristique :

$$\text{supp } \tilde{u} \subset \{(\tau, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \tau = k^3\}.$$

Cette propriété de localisation spectrale exacte n'est pas vraie pour les solutions de l'équation non linéaire (16.2.1). Il est donc important d'introduire des espaces de fonctions qui sont approximativement spectralement localisé près de la variété caractéristique.

Définition 16.14. *Soit $s \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ et $u = u(t, x) \in L^2(\mathbb{T}^2)$ une fonction L^2 , 2π -périodique en t et en x . On introduit*

$$\|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{T}^2)}^2 := \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + |\tau - k^3|^2\right)^b (1 + |k|^2)^s |\tilde{u}(\tau, k)|^2,$$

ainsi que l'espace

$$X^{s,b}(\mathbb{T}^2) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}^2); \|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{T}^2)} < +\infty \right\}.$$

Remarque 16.15. En particulier, si u vérifie $u_t + u_{xxx} = 0$ avec $u(0) \in H^s(\mathbb{T})$, alors $u \in X^{s,b}(\mathbb{T}^2)$ pour tout $b \geq 0$.

Proposition 16.16. *Il existe une constante C telle que*

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \leq C \|u\|_{X^{0,1/3}(\mathbb{T}^2)}.$$

Remarque 16.17. Ce résultat joue un rôle fondamental dans l'étude du problème de Cauchy pour l'équation non linéaire (16.2.1). Cependant, pour comprendre en quoi ce résultat est surprenant, il est plus parlant de considérer une solution u de l'équation linéaire $\partial_t u + \partial_{xxx} u = 0$. Si la donnée initiale u_0 appartient à $L^2(\mathbb{T})$, alors $u \in X^{0,b}(\mathbb{T}^2)$ pour tout $b \geq 0$ comme nous l'avons déjà vu. On peut donc appliquer cette proposition pour en déduire que

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

C'est une amélioration nette de l'injection de Sobolev, qui énonce en dimension 2 que

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \leq C \|u\|_{H^{1/4}(\mathbb{T}^2)}.$$

Démonstration. La démonstration que nous suivons est due à Nikolay Tzvetkov. Décomposons

$$u = \sum_{p \in \mathbb{N}} u_p \quad \text{où} \quad u_p = (2\pi)^{-2} \sum_{\substack{\tau, k \in \mathbb{Z} \\ 2^p \leq \langle \tau - k^3 \rangle < 2^{p+1}}} e^{i\tau t + ikx} \tilde{u}(\tau, k).$$

Alors pour tout $b \geq 0$,

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} 2^{2bp} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq \|u\|_{X^{0,b}(\mathbb{T}^2)}^2.$$

En particulier, pour $b = 1/3$, on a

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} 2^{\frac{2}{3}p} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq \|u\|_{X^{0,1/3}(\mathbb{T}^2)}^2.$$

Par ailleurs

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}^2 = \|uu\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{p' \in \mathbb{N}} \|u_p u_{p'}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq 2 \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} \|u_p u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} \|u_p u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq K \sum_{p \in \mathbb{N}} 2^{\frac{2}{3}p} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2.$$

Il est bien sûr suffisant de montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \|u_p u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq K 2^{-\varepsilon m} \sum_{p \in \mathbb{N}} 2^{\frac{2}{3}p} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2,$$

pour une constante K indépendante de m . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit que cette inégalité sera une conséquence de

$$(16.2.2) \quad \|u_p u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq K 2^{-\varepsilon m} 2^{\frac{1}{3}p} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} (2^m 2^p)^{\frac{1}{3}} \|u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)},$$

car

$$\left(\sum_p 2^{\frac{2}{3}p} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_p (2^m 2^p)^{\frac{2}{3}} \|u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_p 2^{\frac{2}{3}p} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2.$$

Notre but est donc de démontrer l'inégalité (16.2.2). Notons que l'on peut supposer sans perte de généralité que $\|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} = 1 = \|u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$.

Ecrivons u_p et u_{p+m} sous la forme

$$u_p = \sum_{\tau_1, k_1 \in \mathbb{Z}} e^{i\tau_1 t + ik_1 x} \tilde{u}_p(\tau_1, k_1), \quad u_{p+m} = \sum_{\tau_2, k_2 \in \mathbb{Z}} e^{i\tau_2 t + ik_2 x} \tilde{u}_{p+m}(\tau_2, k_2).$$

avec $u_p(\tau, k) = \varphi_p(\tau - k^3) \tilde{u}(\tau, k)$ où $\varphi_p(y)$ la fonction qui vaut 1 si $2^p \leq \langle y \rangle < 2^{p+1}$ et 0 sinon. Alors

$$u_p u_{p+m} = \sum_{\tau, k} c(\tau, k) e^{i\tau t + ikx}$$

avec

$$c(\tau, k) = \sum_{\tau_1 + \tau_2 = \tau} \sum_{k_1 + k_2 = k} \tilde{u}_p(\tau_1, k_1) \tilde{u}_{p+m}(\tau_2, k_2).$$

On décompose cette somme en deux parties. On introduit

$$c_1(\tau, k) = \begin{cases} c(\tau, k) & \text{si } |k| \leq 2^{\frac{1}{3}(p+m)}, \\ 0 & \text{si } |k| > 2^{\frac{1}{3}(p+m)}, \end{cases} \quad c_2(\tau, k) = \begin{cases} 0 & \text{si } |k| \leq 2^{\frac{1}{3}(p+m)}, \\ c(\tau, k) & \text{si } |k| > 2^{\frac{1}{3}(p+m)}. \end{cases}$$

Posons pour $j = 1, 2$,

$$U_j = \sum_{\tau, k} c_j(\tau, k) e^{i\tau t + ikx}.$$

Pour démontrer (16.2.2), nous allons montrer que

$$(16.2.3) \quad \|U_j\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq K 2^{-\varepsilon m} 2^{\frac{1}{3}p} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} (2^m 2^p)^{\frac{1}{3}} \|u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)},$$

Commençons par étudier U_2 . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{\alpha \in A} X_\alpha \right)^2 \leq (\#A) \sum_{\alpha \in A} X_\alpha^2$$

et la propriété de localisation, nous obtenons

$$|c_2(\tau, k)|^2 \leq a(\tau, k) \sum_{k_1 + k_2 = k} \sum_{\tau_1 + \tau_2 = \tau} |\tilde{u}_p(\tau_1, k_1)|^2 |\tilde{u}_{p+m}(\tau_2, k_2)|^2$$

où $a(\tau, k)$ est le cardinal de l'ensemble $A(\tau, k)$ des quadruplets $(k_1, k_2, \tau_1, \tau_2) \in \mathbb{Z}^4$ qui vérifient

$$(16.2.4) \quad k_1 + k_2 = k, \quad \tau_1 + \tau_2 = \tau, \quad \tau_1 = k_1^3 + O(2^p), \quad \tau_2 = k_2^3 + O(2^{m+p}).$$

Pour démontrer (16.2.3) pour $j = 1$, en utilisant l'inégalité de Plancherel, on se ramène à montrer que

$$\sum_{\tau, k} |c_2(\tau, k)|^2 \leq K 2^{(\frac{2}{3}-2\varepsilon)m} 2^{\frac{4}{3}p}.$$

Par ailleurs, comme $\|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} = 1 = \|u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$, en utilisant Fubini nous obtenons

$$\sum_{\tau, k} \sum_{k_1+k_2=k} \sum_{\tau_1+\tau_2=\tau} |\tilde{u}_p(\tau_1, k_1)|^2 |\tilde{u}_{p+m}(\tau_2, k_2)|^2 = 1.$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$(16.2.5) \quad a(\tau, k) \leq C 2^{(\frac{2}{3}-2\varepsilon)m} 2^{\frac{4}{3}p},$$

pour tout $\tau \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $|k| \geq 2^{(p+m)/3}$.

Fixons (k, τ) et estimons $a(\tau, k)$. Sous les contraintes (16.2.4) précédentes, on a

$$\tau = k_1^3 + k_2^3 + O(2^{m+p}).$$

Comme $k = k_1 + k_2$, on en déduit

$$\tau = k^3 - 3kk_1k_2 + O(2^{m+p}),$$

ce qui implique

$$3k \left(k_1 - \frac{k}{2} \right)^2 = -3kk_1k_2 + \frac{3}{4}k^3 = \tau - \frac{1}{4}k^3 + O(2^{m+p}).$$

Par hypothèse, si c_1 est non nul on a $|k| \geq (2^{m+p})^{\frac{1}{3}}$. On en déduit alors que

$$\left(k_1 - \frac{k}{2} \right)^2 = e(\tau, k) + O(2^{\frac{2}{3}(m+p)}),$$

où $e(\tau, k)$ est un nombre fixé qui ne dépend que de τ et k . En particulier, il y a au plus $O(2^{\frac{m}{3}} 2^{\frac{p}{3}})$ solutions possibles pour k_1 (et donc pour (k_1, k_2)). Une fois que k_1 est choisi, il y a au plus $O(2^p)$ entiers τ_1 qui vérifient $\tau_1 = k_1^3 + O(2^p)$. Il y a donc au plus $O(2^p)$ couples (τ_1, τ_2) qui vérifient les contraintes

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau, \quad \tau_1 = k_1^3 + O(2^p), \quad \tau_2 = k_2^3 + O(2^{m+p}).$$

En combinant ces deux remarques, on trouve que $|a(\tau, k)| = O(2^{\frac{m}{3}} 2^{\frac{4}{3}p})$. On obtient donc l'inégalité désirée (16.2.5) dans laquelle on peut prendre alors $\varepsilon = 1/6$.

Il reste à démontrer (16.2.3) pur $j = 1$. On veut montrer que

$$(16.2.6) \quad \|U_1\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq 2^{(\frac{1}{3}-\varepsilon)m} 2^{\frac{2}{3}p} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

Posons $J = [-2^{\frac{1}{3}(m+p)}, 2^{\frac{1}{3}(m+p)}]$ et notons $\|f\|_{\ell_k^2(J; \ell_\tau^2(\mathbb{Z}))}$ la semi-norme définie par

$$\|f\|_{\ell_k^2(J; \ell_\tau^2(\mathbb{Z}))}^2 = \sum_{k \in J} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} |f(\tau, k)|^2.$$

En utilisant Plancherel et l'inégalité de Minkowski on trouve

$$\begin{aligned} \|U_1\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} &= \left\| \sum_{k_1+k_2=k} \sum_{\tau_1} \tilde{u}_p(\tau_1, k_1) \tilde{u}_{p+m}(\tau - \tau_1, k_2) \right\|_{\ell_k^2(J; \ell_\tau^2(\mathbb{Z}))} \\ &\leq \left\| \sum_{k_1+k_2=k} \sum_{\tau_1} \|\tilde{u}_p(\tau_1, k_1)\| \|\tilde{u}_{p+m}(\cdot, k_2)\|_{\ell_\tau^2(\mathbb{Z})} \right\|_{\ell_k^2(J)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $(\sum_{\alpha \in A} X_\alpha)^2 \leq (\#A) \sum_{\alpha \in A} X_\alpha^2$ et en observant comme précédemment que, pour tout k_1 , il y a $O(2^p)$ éléments τ_1 vérifiant $\tau_1 = k_1^3 + O(2^p)$, on obtient

$$\sum_{\tau_1} |\tilde{u}_p(\tau_1, k_1)| \lesssim 2^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{\tau_1} |\tilde{u}_p(\tau_1, k_1)|^2 \right)^{1/2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|U_1\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} &\leq 2^{\frac{p}{2}} \left\| \sum_{k_1+k_2=k} \|\tilde{u}_p(\cdot, k_1)\|_{\ell_\tau^2} \|\tilde{u}_{p+m}(\cdot, k_2)\|_{\ell_\tau^2} \right\|_{\ell_k^2} \\ &\lesssim 2^{\frac{m}{6}} 2^{\frac{2p}{3}} \|u_p\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|u_{p+m}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à nouveau l'inégalité $(\sum_{\alpha \in A} X_\alpha)^2 \leq (\#A) \sum_{\alpha \in A} X_\alpha^2$ et le fait que si $k \in J$ alors $|k| \leq C2^{\frac{1}{3}(m+p)}$ dans la dernière ligne. On obtient donc (16.2.6) avec $\varepsilon = 1/6$. \square

Cinquième partie

Problèmes

Chapitre 17

Problèmes d'Analyse fonctionnelle

17.1 Frames et suites de Bessel

Soit H un espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

1. Considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans H . On dit que cette suite est un frame s'il existe deux réels strictement positifs A et B tels que,

$$(*) \quad \forall x \in H, \quad A \|x\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |(x, x_n)|^2 \leq B \|x\|^2.$$

a. Supposons que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H . Dire si les quatre familles suivantes sont ou ne sont pas des frames (donner à chaque fois une justification succincte) :

- $E_1 = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- $E_2 = (e_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$;
- $E_3 = (e_0, e_0, e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots)$ où chaque élément est répété deux fois ;
- $E_4 = (e_n/(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$;

b. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un frame. Notons $V = \text{Vect} \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que V est un sous-espace dense dans H .

2. a. Considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans H telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |(x, x_n)|^2 < +\infty$ pour tout $x \in H$.

Introduisons l'application $U: H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ définie par $U(x) = ((x, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer à l'aide d'un théorème général sur les espaces de Banach que l'application U est continue. En déduire qu'il existe $B > 0$ telle que

$$(**) \quad \forall x \in H, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |(x, x_n)|^2 \leq B \|x\|^2.$$

b. Considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans H qui vérifie la propriété (**). Considérons un ensemble fini $F \subset \mathbb{N}$ et une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que

$$\left\| \sum_{n \in F} c_n x_n \right\|^2 \leq \sup_{y \in H, \|y\|=1} \left(\sum_{n \in F} |c_n|^2 \right) \left(\sum_{n \in F} |(y, x_n)|^2 \right).$$

c. En déduire que

$$\left\| \sum_{n \in F} c_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n \in F} |c_n|^2.$$

Puis montrer que la série $\sum c_n x_n$ converge.

17.2 Le lemme div-curl de Murat et Tartar

Notations : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On note $C^\infty(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont la restriction à Ω de fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^n . On note $C_0^\infty(\Omega)$ les fonctions C^∞ et à support compact dans Ω .

Considérons un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et deux suites de champs de vecteurs, $E_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $B_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. On note (E_n^1, E_n^2) et (B_n^1, B_n^2) les coordonnées de E_n et B_n . On suppose que :

(H1) E_n et B_n appartiennent à $C^\infty(\bar{\Omega})^2$ pour tout entier n .

(H2) On a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\|E_n\|_{L^2(\Omega)^2} + \|B_n\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\operatorname{div} E_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{curl} B_n\|_{L^2(\Omega)} \right) < +\infty,$$

où $\|E_n\|_{L^2(\Omega)^2} = \sqrt{\|E_n^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E_n^2\|_{L^2(\Omega)}^2}$, et où $\operatorname{div} E_n$ et $\operatorname{curl} B_n$ sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} définies par

$$\operatorname{div} E_n = \partial_{x_1} E_n^1 + \partial_{x_2} E_n^2, \quad \operatorname{curl} B_n = \partial_{x_2} B_n^1 - \partial_{x_1} B_n^2.$$

(H3) Il existe $E \in L^2(\Omega)^2$ et $B \in L^2(\Omega)^2$ telles que $E_n \rightharpoonup E$ et $B_n \rightharpoonup B$ dans $L^2(\Omega)^2$, ce qui signifie que chaque coordonnée converge faiblement ($E_n^j \rightharpoonup E^j$ pour $j = 1, 2$ et de même pour B_n).

Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$(*) \quad \int_{\Omega} \varphi(x) E_n(x) \cdot B_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(x) E(x) \cdot B(x) dx,$$

où $y \cdot y'$ est le produit scalaire de \mathbb{R}^2 .

1. Fixons une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et considérons $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 sur le support de φ , de sorte que $\chi\varphi = \varphi$. On introduit

$$v_n = \varphi E_n, \quad w_n = \chi B_n, \quad v = \varphi E, \quad w = \chi B.$$

On étend ces fonctions par 0 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ (et on les note toujours v_n, w_n, v, w). Montrer que v_n et w_n appartiennent à $H^1(\mathbb{R}^2)^2$. Montrer que v_n converge faiblement vers v dans $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ et que de même w_n converge faiblement vers w dans $L^2(\mathbb{R}^2)^2$.

2. Si $f = (f^1, f^2)$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^2 , on note $\widehat{f} = (\widehat{f}^1, \widehat{f}^2)$ sa transformée de Fourier. Montrer que (\widehat{v}_n) et (\widehat{w}_n) sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ et dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)^2$.

3. Montrer que (*) est équivalent à

$$(**) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{v}_n(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}_n(\xi)} \, d\xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{v}(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}(\xi)} \, d\xi.$$

4. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, les suites $(\widehat{v}_n(\xi))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\widehat{w}_n(\xi))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\widehat{v}(\xi)$ et $\widehat{w}(\xi)$, respectivement.

5. Soit $R > 0$. Notons $B(0, R)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{R}^2 . Montrer que

$$\int_{B(0, R)} \widehat{v}_n(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}_n(\xi)} \, d\xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{B(0, R)} \widehat{v}(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}(\xi)} \, d\xi.$$

6. Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Posons $\xi^\perp = (\xi_2, -\xi_1)$. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on a

$$X = \left(X \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right) \frac{\xi}{|\xi|} + \left(X \cdot \frac{\xi^\perp}{|\xi|} \right) \frac{\xi^\perp}{|\xi|}.$$

Montrer ensuite que pour tout X, Y dans \mathbb{R}^2 on a

$$|X \cdot Y| \leq \frac{1}{|\xi|} \left(|Y| |X \cdot \xi| + |X| |Y \cdot \xi^\perp| \right).$$

7. Montrer que les suites de fonctions $\xi \mapsto \xi \cdot \widehat{v}_n(\xi)$ et $\xi \mapsto \xi^\perp \cdot \widehat{w}_n(\xi)$ sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

8. En déduire que pour tout $R > 0$ on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{|\xi| > R} \widehat{v}_n(\xi) \cdot \overline{\widehat{w}_n(\xi)} \, d\xi \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0,$$

et conclure la démonstration de (*).

17.3 Étude du pendule de Kapitsa par la convergence faible

Fixons trois nombres strictement positifs a, b, T . Etant donnés $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in]0, 1]$, on admet l'existence d'une fonction $\theta_\varepsilon \in C^2([0, T])$ vérifiant

$$(*) \quad \begin{cases} \theta_\varepsilon''(t) = \left(a + \frac{b}{\varepsilon} \cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \sin(\theta_\varepsilon(t)), & t \geq 0, \\ \theta_\varepsilon(0) = \alpha, \\ \theta_\varepsilon'(0) = \beta. \end{cases}$$

On admet l'existence de θ_ε . L'équation précédente régit la dynamique d'un pendule inversé (le poids est en haut) soumis à une oscillation verticale rapide. Si $b = 0$, la solution nulle est instable. Le but de ce problème est de montrer que la solution nulle est stable si $|b|$ est assez grand. Ce résultat est dû à Kapitsa et nous allons voir une démonstration donnée par Laurence Evans.

1. Montrer que si θ_ε est solution de (*) si et seulement si $\theta_\varepsilon(0) = \alpha$ et

$$(**) \quad \theta_\varepsilon'(t) = \beta + b \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \sin(\theta_\varepsilon(t)) + \int_0^t \left(a \sin(\theta_\varepsilon(s)) - b \sin\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \cos(\theta_\varepsilon(s)) \theta_\varepsilon'(s)\right) ds.$$

2. On rappelle l'inégalité de Gronwall : si $u: [0, T] \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue vérifiant

$$u(t) \leq A + B \int_0^t u(s) ds,$$

alors $u(t) \leq Ae^{Bt}$ pour tout $t \in [0, T]$.

En appliquant ceci à $u_\varepsilon(t) = |\theta_\varepsilon'(t)|$, en déduire qu'il existe une constante C ne dépendant que de (a, b, α, β, T) telle que,

$$\sup_{\varepsilon \in]0, 1]} \max_{t \in [0, T]} |\theta_\varepsilon'(t)| \leq C.$$

En déduire qu'il existe une constante C' , ne dépendant que de (a, b, α, β, T) telle que,

$$\sup_{\varepsilon \in]0, 1]} \max_{t \in [0, T]} |\theta_\varepsilon(t)| \leq C'.$$

3. En déduire qu'il existe $\theta \in C^0([0, T]) \cap H^1([0, T])$ telle que l'on peut extraire une sous-suite $(\theta_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ où ε_n tend vers 0, convergeant vers θ fortement dans $C^0([0, T])$ et faiblement dans $H^1([0, T])$.

4. Soit $\psi \in C_0^\infty(]0, T[)$. Montrer que

$$\int_0^T \psi(t) \theta_\varepsilon'(t) \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt = R_\varepsilon + \int_0^T b \psi(t) \cos^2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \sin(\theta_\varepsilon(t)) dt,$$

où $R_\varepsilon = O(\varepsilon)$. Indication : utiliser l'équation (*) et une intégration par parties.

5. Montrer que $\cos^2(t/\varepsilon)$ converge faiblement vers la fonction constante $1/2$ lorsque ε tend vers 0. En déduire que

$$\theta'_{\varepsilon_n}(t) \sin\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) \rightharpoonup \frac{b}{2} \sin(\theta(t)) \quad \text{dans } L^2(]0, T[).$$

6. En utilisant (**), montrer que la dérivée au sens faible de θ est donnée par

$$\theta'(t) = \beta + \int_0^t \left(a \sin(\theta(s)) - \frac{b^2}{4} \sin(2\theta(s)) \right) ds.$$

7. Montrer que $\theta \in C^2([0, T])$ et θ vérifie

$$(***) \quad \begin{cases} \theta'' = a \sin(\theta(t)) - \frac{b^2}{4} \sin(2\theta(t)), & t \geq 0, \\ \theta(0) = \alpha, \\ \theta'(0) = \beta. \end{cases}$$

En déduire que $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ converge vers θ quand ε tend vers 0 (et pas uniquement la suite extraite $(\theta_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$).

8. Étudier la stabilité de la solution nulle pour le système (***)

Chapitre 18

Problèmes sur les espaces de Sobolev

18.1 Injections de Sobolev

Nous commençons à l'exercice 1 par revoir l'injection usuelle de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ lorsque $s > d/2$. Nous montrons que, pour $d \geq 3$, on dispose d'une estimation qui ne nécessite aucun contrôle des basses fréquences. L'exercice 3 propose une application de l'injection $H^1(\mathbb{R}^3) = W^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, pour démontrer une loi de produit. L'exercice 4 concerne lui une loi de composition. On demande de montrer le résultat classique que, si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, alors $|u| \in H^1(\mathbb{R}^n)$. On applique ce résultat pour montrer un principe du maximum pour la solution de l'équation de la chaleur : si $u(0, x) \geq 0$ pour tout x , alors $u(t, x) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et tout x . Bien sûr ce résultat est une conséquence du fait que, pour tout $t \geq 0$, l'opérateur solution $S(t)$ est à noyau positif. L'intérêt de la démonstration que l'on donne est qu'elle s'applique à l'identique pour le problème posé dans un domaine à bord. Les exercices 6, 7 et 8 concernent l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg et la décomposition de Littlewood-Paley.

Exercice 1. Considérons un entier $n \geq 3$ et un réel $s > n/2$. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla u\|_{H^{s-1}}.$$

Est-ce que cette inégalité est vraie en dimension 2 ?

Exercice 2. Les injections de Sobolev limites ne sont pas vraies (autrement dit, $H^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$). Cependant, nous allons voir que les injections de Sobolev semi-classiques sont vraies pour le cas limite.

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(0) = 1$. Définissons pour tout $h \in]0, 1]$ un opérateur linéaire

$A_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$(A_h u)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \phi(h\xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Montrer que, pour tout $r \in [2, +\infty]$, tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et tout $h \in]0, 1]$,

$$\|A_h u\|_{L^r} \leq C h^{-n(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u\|_{L^2},$$

pour une constante C que l'on précisera.

Exercice 3. On rappelle que $H^1(\mathbb{R}^2) = W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ s'injecte continûment dans $L^6(\mathbb{R}^3)$. En déduire qu'il existe une constante K telle que

$$\|fg\|_{W^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq K \|f\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^3)},$$

pour tout $f, g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 4. a) Soit $u \in C^1(\mathbb{R}, H)$ où H est un espace de Hilbert. Montrer que la fonction $\|u\|_H^2 : t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ est C^1 et que

$$\frac{d}{dt} \|u\|_H^2 = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{du}{dt}, u \right\rangle.$$

b) Soit $v \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\mathbb{R}^n))$. Montrer que la fonction $t \mapsto \|v\|_{L^2}^2$ est C^1 et que

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{L^2}^2 = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{dv}{dt}, v \right\rangle_{H^{-1}, H^1}.$$

c) Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction à valeurs réelles. Montrer que $|u|$, u^- et u^+ sont dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

d) Soit $v \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\mathbb{R}^n))$ telle que $\partial_t v = \Delta v$. Montrer que

$$\frac{d}{dt} \int (v^-)^2 \, dx \leq 0.$$

En déduire que $v(t) \geq 0$ si $v(0) \geq 0$.

Exercice 5. On admet que $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$. En déduire qu'il existe une constante C telle que,

$$|\Omega| \leq C |\partial\Omega|^{n/(n-1)}.$$

pour tout ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n de frontière C^2 .

Exercice 6. Les résultats démontrés à l'exercice 1 impliquent qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

En appliquant ce résultat à la fonction v définie par $v(x) = u(\lambda x)$, pour un paramètre λ bien choisi, démontrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}.$$

Exercice 7. Soit $d \geq 1$ et soit $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction C^∞ , radiale, qui vaut 1 sur la boule $\{|\xi| \leq 1\}$ et qui s'annule à l'extérieur de la boule $\{|\xi| \leq 2\}$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\widehat{\Delta_j u}(\xi) = (\varphi(2^{-j}\xi) - \varphi(2^{-j+1}\xi)) \widehat{u}(\xi).$$

1. Montrer que pour tout $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ il existe une constante C telle que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\|\Delta_j u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C 2^{j(\frac{d}{p} - \frac{d}{q})} \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Montrer que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, il existe une constante C telle que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\|\Delta_j |\nabla| u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C 2^j \|\Delta_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Exercice 8. Soient $\mathbb{N} \ni d \geq 1$ et $1 \leq p < q \leq +\infty$ tels que

$$\theta := \left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q} \right) \in]0, 1[.$$

On souhaite montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^\theta.$$

(Noter que l'on retrouve le résultat de l'exercice 6.)

Vérifier que l'inégalité est invariante par homothétie ($u(x) \mapsto \lambda u(x)$) et changement d'échelles ($u(x) \mapsto u(\lambda x)$). En déduire que l'on peut supposer que $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 1 = \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. En écrivant u sous la forme $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j u$, conclure en utilisant les inégalités de la question précédente.

18.2 Le problème de Dirichlet dans un demi-espace

On considère le problème de Dirichlet associé à une donnée non nulle sur le bord,

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = F \quad \text{dans } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = f,$$

où γ est une fonction C^∞ minorée par une constante strictement positive. On se propose de résoudre ce problème dans le demi-espace

$$\Omega = \{x = (x', y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : y < 0\}.$$

1) Rappelons que l'inégalité de Poincaré n'est vraie que dans un domaine Ω inclus dans une bande de largeur finie ; en particulier pour un domaine borné. Pour étudier le problème de Dirichlet dans un demi-espace, on commence par prouver une inégalité analogue à celle de Poincaré dans ce contexte.

Soit $\sigma > 1$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\iint_{\Omega} \langle y \rangle^{-2\sigma} |u(x', y)|^2 dx' dy \leq C \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x', y) \right|^2 dx' dy$$

pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Indication : pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on a $u(x', y) = - \int_y^0 \frac{\partial u}{\partial y}(x', t) dt$.

2) On considérera dans ce qui suit la norme

$$\mathcal{N}(u) = \left(\|\langle y \rangle^{-\sigma} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et on notera $H^{1,0}(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ pour cette norme.

Montrer que pour tout $\sigma > 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\iint_{\Omega} \langle y \rangle^{-2\sigma} |u(x', y)|^2 dx' dy \leq C \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x', y) \right|^2 dx' dy,$$

pour tout $u \in H^{1,0}(\Omega)$.

3) On considère maintenant la forme

$$((u, v)) = (\nabla u, \gamma \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

Montrer les propriétés suivantes :

1. La quantité $((u, v))$ est un produit scalaire sur l'espace $H^{1,0}(\Omega)$.
2. Muni de ce produit scalaire l'espace $H^{1,0}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
3. Sur $H^{1,0}(\Omega)$ les normes $\mathcal{N}(u)$ et $((u, u))^{\frac{1}{2}}$ sont équivalentes.

On déduit de ci-dessus que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans l'espace $H^{1,0}(\Omega)$ pour la norme $((\cdot, \cdot))^{\frac{1}{2}}$. Son dual est donc un espace de distributions et le lemme de représentation des formes linéaires sur un Hilbert implique que

$$\forall f \in (H^{1,0}(\Omega))' \quad \exists! u \in H^{1,0}(\Omega) : f(v) = ((v, u)), \quad \forall v \in H^{1,0}(\Omega).$$

Considérons maintenant $\underline{\psi} \in H^1(\Omega)$. Dédurre qu'il existe un unique $u \in H^{1,0}(\Omega)$ tel que

$$\iint_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx' dy = \iint_{\Omega} \gamma \nabla \underline{\psi} \cdot \nabla v dx' dy \quad \forall v \in H^{1,0}(\Omega).$$

4) Rappelons la notation $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$. Etant donné $y \leq 0$, considérons le multiplicateur de Fourier $e^{y\langle D_x \rangle}$. Par définition c'est l'opérateur défini par $e^{y\langle D_x \rangle} = \mathcal{F}^{-1}(e^{y\langle \xi \rangle} \mathcal{F}\cdot)$, c'est-à-dire

$$\widehat{e^{y\langle D_x \rangle} f}(\xi) = e^{y\langle \xi \rangle} \widehat{f}(\xi).$$

Notons que cet opérateur est bien défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\chi(y) = 1$ si $y \geq -\frac{1}{2}$ et $\chi(y) = 0$ pour $y \leq -1$. Montrer que la fonction $\underline{\psi}$ définie par

$$\underline{\psi}(x', y) = \chi(y)(e^{y\langle D_x \rangle} \psi)(x),$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. $\underline{\psi}|_{y=0} = \psi$,
2. $\underline{\psi} = 0$ sur $\{(x, y) : y \leq -1\}$,
3. $\|\underline{\psi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)}$.

5) Nous avons vu qu'il existe un unique $u \in H^{1,0}(\Omega)$ tel que

$$\iint_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla v \, dx' \, dy = \iint_{\Omega} \gamma \nabla \underline{\psi} \cdot \nabla v \, dx' \, dy \quad \forall v \in H^{1,0}(\Omega).$$

Si $v \in C_0^\infty(\Omega)$ on en déduit qu'il existe une unique solution faible $u \in H^{1,0}(\Omega)$ de

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = -\operatorname{div}(\gamma \nabla \underline{\psi}).$$

Montrer que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}.$$

Posons

$$\phi = u + \underline{\psi}.$$

Alors ϕ résout le problème

$$(*) \quad \operatorname{div}(\gamma \nabla \phi) = 0, \quad \phi|_{\partial\Omega} = \psi.$$

Montrer que la solution du problème (*) construite par cette procédure ne dépend pas du choix du relèvement $\underline{\psi}$ choisi pourvu que celui-ci reste borné dans $H^1(\Omega)$.

Chapitre 19

Problèmes d'Analyse harmonique

19.1 Inégalité d'interpolation de Riesz–Thorin

Nous allons démontrer le théorème de Riesz–Thorin. On utilisera les trois résultats élémentaires rappelés ici.

1) **Densité des fonctions simples.** Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ -fini. Alors l'ensemble des combinaisons linéaires finies $\sum \alpha_j 1_{A_j}$ où les α_j sont des nombres complexes et les A_j sont des parties mesurables de Ω de mesure finie, est dense dans l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

2) **Représentation de la norme par dualité.** Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ -fini. Alors, pour tout $q \in [1, +\infty]$ et tout $f \in L^q(\Omega, \mu)$ on a

$$\|f\|_{L^q} = \sup_{g \in L^{q'}} \left(\frac{1}{\|g\|_{L^{q'}}} \int fg \right), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

En outre, on peut limiter le supremum ci-dessus aux fonctions simples.

3) **Principe du maximum pour les fonctions holomorphes.** Soit Ω un ouvert connexe borné du plan complexe. Si f est holomorphe sur Ω et continue sur $\bar{\Omega}$, alors $\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$. En outre, le maximum de $|f|$ ne peut être atteint qu'en un point de $\partial\Omega$ sauf si f est constante dans Ω .

*** Le lemme des trois droites ***

Soit $S = \{x + iy : x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ une bande du plan complexe, et soit $\varphi: S \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée, qui est de plus holomorphe dans l'intérieur de S .

1) On veut montrer que $\sup_S |\varphi| = \sup_{\partial S} |\varphi|$.

a) Traiter le cas où φ a pour limite 0 à l'infini.

b) Soit $\delta > 0$ et $z_0 \in S$ tel que $|\varphi(z_0)| \geq (1 - \delta) \sup_S |\varphi|$. En appliquant le résultat du a) à la fonction $\psi_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon(z-z_0)^2} \varphi(z)$, montrer que,

$$\sup_{\partial S} |\varphi| \geq e^{-\varepsilon} (1 - \delta) \sup_S |\varphi|,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et conclure.

2) Pour $\theta \in [0, 1]$, on veut estimer $M_\theta := \sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi(\theta + iy)|$ en fonction de M_0 et M_1 . En appliquant le résultat précédent à la fonction $\phi(z) = e^{-\lambda z} \varphi(z)$ (λ est un réel à choisir), montrer que, pour tout $\theta \in [0, 1]$,

$$M_\theta \leq M_1^\theta M_0^{1-\theta}.$$

Ce résultat s'appelle le **lemme des trois droites**.

*** Théorème de Riesz–Thorin ***

La question est de démontrer le Riesz–Thorin, dont on rappelle l'énoncé. Soit (Ω, μ) et (Λ, ν) deux espaces mesurés σ -finis, et considérons quatre exposants $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$. Soit T une application linéaire continue de $L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega)$ dans $L^{q_0}(\Lambda) + L^{q_1}(\Lambda)$. Alors, pour tout $\theta \in]0, 1[$,

$$\|T\|_{L^{p_\theta} \rightarrow L^{q_\theta}} \leq \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}^\theta,$$

où

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

1) Traiter le cas où $p_\theta = +\infty$.

2) On suppose maintenant que $p_\theta \neq +\infty$. Posons

$$\alpha(z) = p_\theta \left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \right), \quad \beta(z) = q'_\theta \left(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1} \right),$$

et, pour f et g fonctions simples, posons

$$f_z(x) = |f(x)|^{\alpha(z)} \frac{f(x)}{|f(x)|}, \quad g_z(x) = |g(x)|^{\beta(z)} \frac{g(x)}{|g(x)|}.$$

Montrer que la fonction

$$\varphi: z \mapsto \int (T f_z) g_z dx,$$

est bien définie et est holomorphe sur la bande S , et continue sur \bar{S} .

2) En appliquant le lemme des trois droites, en déduire que

$$\left| \int (T f) g dx \right| \leq \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}} \|g\|_{L^{q'_\theta}}.$$

3) Conclure.

19.2 Lemme de Van der Corput et applications

Exercice 9. On s'intéresse au comportement, lorsque le paramètre λ tend vers $+\infty$, des intégrales oscillantes

$$I_{a,b,\phi}(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx,$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et la phase $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ est une fonction à valeurs réelles.

Nous considérerons d'abord le cas d'une phase non-stationnaire (telle que ϕ' ne s'annule pas sur $[a, b]$). L'argument d'intégration par parties que l'on utilisera est valable en toute dimension. Il donne ici une décroissance en l'inverse de $\lambda \times (1+b-a)$. On montrera ensuite des estimations fines, indépendantes de la longueur $b-a$, qui elles sont spécifiques à la dimension 1. Ces estimations sont connues sous le nom de **lemme de Van der Corput**.

1) Supposons qu'il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que,

$$\forall x \in [a, b], \quad |\phi'(x)| \geq c \quad \text{et} \quad |\phi''(x)| \leq C.$$

En utilisant la relation

$$e^{i\lambda\phi} = \frac{1}{i\lambda\phi'} \frac{d}{dx} (e^{i\lambda\phi}),$$

montrer que, pour tout $\lambda > 0$, on a

$$|I_{a,b,\phi}(\lambda)| \leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2}{c} + \frac{C(b-a)}{c^2} \right).$$

2) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda > 0$ et pour toute phase $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ telle que ϕ' est monotone et ne s'annule pas sur $[a, b]$,

$$|I_{a,b,\phi}(\lambda)| \leq \frac{4}{\inf_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)|} \frac{1}{\lambda}.$$

(On pourra utiliser que $\int |(f(g(x)))'| dx = |\int (f(g(x)))' dx|$ si f et g sont deux fonctions monotones.)

3) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tout $\lambda > 0$ et toute phase $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi'' \geq 1$ sur $[a, b]$, on a

$$|I_{a,b,\phi}(\lambda)| \leq \frac{10}{\lambda^{1/2}}.$$

(On pourra utiliser que $\{x \in [a, b] : |\phi'(x)| \leq \lambda^{-1/2}\}$ est un intervalle de longueur au plus égale à $2\lambda^{-1/2}$.)

Exercice 10. 1) Soit $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles ou complexes. Montrer que

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = \psi(b) I_{a,b,\phi}(\lambda) - \int_a^b \psi'(x) I_{a,x,\phi}(\lambda) dx.$$

2) En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tout $\lambda > 0$, toute phase telle que $\phi'' \geq 1$ sur $[a, b]$, et tout $\psi \in C^1(\mathbb{R})$,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq \frac{10}{\lambda^{1/2}} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right).$$

3) (Application) Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $R > 0$,

$$\left| \int_{-R}^R e^{i(\xi+t\xi^2)} |\xi|^{-1/2} d\xi \right| \leq C.$$

Exercice 11. Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} |D_x|^{-1/4} e^{-it\partial_x^2} g(t, x) dt \right\|_{L_x^2} \leq C \|g\|_{L_x^{4/3} L_t^1}.$$

Afin de simplifier, on pourra supposer que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et que sa transformée de Fourier $\widehat{g}(s, \xi)$ par rapport à x est supportée dans un compact $A \subset \mathbb{R}$ indépendant de s .

1) Montrer qu'il suffit de démontrer que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} |D_x|^{-1/4} e^{i(t-s)\partial_x^2} g(s, x) ds \right\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leq C \|g\|_{L_x^{4/3} L_t^1}.$$

2) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |D_x|^{-1/4} e^{i(t-s)\partial_x^2} g(s, x) ds = \iint K(s-t, x-y) g(s, y) dy ds,$$

avec

$$K(t, x) = \int_A e^{i(x\xi+t\xi^2)} |\xi|^{-1/2} d\xi.$$

3) Conclure en utilisant l'exercice 10 et le théorème de Hardy–Littlewood–Sobolev.

4) Montrer que l'inégalité que l'on a démontrée implique que la solution $u = u(t, x)$ de

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

vérifie

$$(*) \quad \|u\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leq C \left\| |D_x|^{1/4} u_0 \right\|_{L^2}.$$

5) En utilisant l'argument TT^* , déduire l'estimation $(*)$ à partir de l'estimation donnée à la question 1.

5) Comparer cette estimation avec celle obtenue par estimation d'énergie.

Solution : Lemme de Van der Corput

On s'intéresse au comportement, lorsque le paramètre λ tend vers $+\infty$, des intégrales

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x) dx,$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ est une fonction à valeurs réelles et $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ est une fonction à valeurs complexes. On appelle ϕ la phase, et ψ l'amplitude. Des intégrales de cette forme (intégrale du produit d'une amplitude par l'exponentielle d'une phase imaginaire) sont appelées intégrales oscillantes.

On va montrer des estimations fines, indépendantes de la longueur $b - a$, qui sont spécifiques à la dimension 1. Ces estimations sont connues sous le nom de **lemme de Van der Corput**. On montrera en particulier le résultat suivant, qui couvre le cas où la phase a un point critique. (Dans la suite, on fera toujours l'hypothèse implicite que la phase est à valeurs réelles. Noter que l'on peut en déduire des résultats pour $\text{Im } \phi \geq 0$.)

Proposition 19.1. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tout $\lambda > 0$, toute phase $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $\phi'' \geq 1$ sur $[a, b]$, et toute amplitude $\psi \in C^1(\mathbb{R})$,*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x) dx \right| \leq \frac{10}{\lambda^{1/2}} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right).$$

Phase non-stationnaire

Afin de bien comprendre la portée de cet énoncé ainsi que le principe de sa démonstration, nous allons montrer un certain nombre de résultats sur les estimations d'intégrales oscillantes. En particulier nous commençons par estimer l'intégrale de l'exponentielle d'une phase qui n'a pas de point critique.

Lemme 19.2. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour toute phase $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ telle que ϕ' ne s'annule pas sur $[a, b]$, on a*

$$\left| \int_a^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq \frac{2}{c} + \frac{C(b-a)}{c^2},$$

avec

$$c = \inf_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)|, \quad C = \sup_{a \leq x \leq b} |\phi''(x)|.$$

Démonstration. En utilisant l'identité

$$e^{i\phi} = \frac{1}{i\phi'} \frac{d}{dx} (e^{i\phi}),$$

et en intégrant par parties, on trouve que

$$\int_a^b e^{i\phi(x)} dx = \frac{e^{i\phi(b)}}{i\phi'(b)} - \frac{e^{i\phi(a)}}{i\phi'(a)} - \frac{1}{i} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\phi'(x)} \right) e^{i\phi(x)} dx,$$

et donc, comme ϕ est à valeurs réelles (noter que $\text{Im } \phi \geq 0$ suffirait),

$$(19.2.1) \quad \left| \int_a^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq \frac{1}{|\phi'(b)|} + \frac{1}{|\phi'(a)|} + \int_a^b \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\phi'(x)} \right) \right| dx.$$

Le résultat s'en déduit directement. □

L'argument d'intégration par parties que l'on vient d'utiliser s'applique en fait en toute dimension. En dimension 1, on peut montrer une estimation très précise en exploitant une propriété de monotonie.

Lemme 19.3. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pour toute phase $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ telle que ϕ' est croissante et ne s'annule pas sur $[a, b]$,*

$$\left| \int_a^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq \frac{3}{\inf_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)|}.$$

Démonstration. La croissance de ϕ' implique que

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\phi'(x)} \right) \right| = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\phi'(x)} \right).$$

En reportant cette identité dans (19.2.1), on en déduit la majoration

$$\left| \int_a^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq \frac{1}{|\phi'(b)|} + \frac{1}{|\phi'(a)|} + \frac{1}{\phi'(a)} - \frac{1}{\phi'(b)}.$$

On en déduit l'estimation désirée (noter que si $\phi'(a) > 0$ alors $\phi'(b) > 0$). □

Phase stationnaire

Les lemmes précédents concernent le cas de phases sans point critique (par exemple $\phi(x) = x$). Nous allons maintenant considérer le cas de phases dont les dérivées peuvent s'annuler (par exemple $\phi(x) = x^k$ avec un entier $k \geq 2$).

Lemme 19.4. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour toute phase $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ telle que ϕ'' ne s'annule pas sur $[a, b]$, on a*

$$\left| \int_a^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq \frac{8}{\sqrt{\inf_{a \leq x \leq b} |\phi''(x)|}}.$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $\phi'' > 0$ sur $[a, b]$, le cas $\phi'' < 0$ sur $[a, b]$ s'en déduit directement en écrivant $\overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}$.

Pour $\alpha > 0$, introduisons l'ensemble

$$J_\alpha := \{x \in [a, b] : |\phi'(x)| \leq \alpha\}.$$

Par hypothèse, ϕ' est strictement croissante et continue sur $[a, b]$, et donc J_α est un intervalle fermé (éventuellement vide) que l'on notera $J_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$. Décomposons l'intégrale selon

$$\int_a^b e^{i\phi(x)} dx = \int_a^{a_\alpha} e^{i\phi(x)} dx + \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} e^{i\phi(x)} dx + \int_{b_\alpha}^b e^{i\phi(x)} dx.$$

Comme ϕ' est strictement croissante sur $[a, b]$, le lemme 19.3 implique que

$$\left| \int_a^{a_\alpha} e^{i\phi(x)} dx \right| \leq \frac{3}{\inf_{a \leq x \leq a_\alpha} |\phi'(x)|} \leq \frac{3}{\alpha}.$$

De même, le module de la dernière intégrale est majoré par $3/\alpha$. L'intégrale sur $[a_\alpha, b_\alpha]$ est plus petite que $b_\alpha - a_\alpha$, que l'on majore en écrivant que

$$2\alpha \geq \phi'(b_\alpha) - \phi'(a_\alpha) = \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} \phi''(x) dx,$$

ce qui implique

$$b_\alpha - a_\alpha \leq \frac{2\alpha}{\inf_{a \leq x \leq b} \phi''(x)}.$$

On a donc montré que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\left| \int_a^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq \frac{6}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\inf_{a \leq x \leq b} \phi''(x)}.$$

On conclut en appliquant cette inégalité avec $\alpha = \sqrt{\inf_{a \leq x \leq b} \phi''(x)}$. □

On peut généraliser le résultat précédent.

Lemme 19.5. *Considérons un entier $k \geq 2$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour toute phase $\phi \in C^k(\mathbb{R})$ telle que $\phi^{(k)}$ ne s'annule pas sur $[a, b]$, on a*

$$\left| \int_a^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq \frac{3^k}{\left(\inf_{a \leq x \leq b} |\phi^{(k)}(x)| \right)^{1/k}}.$$

Démonstration. Le résultat est vrai pour $k = 2$ d'après le lemme 19.4. Nous allons en déduire le résultat pour tout $k \geq 2$ par récurrence, en adaptant la démonstration du lemme 19.4. Ainsi nous introduisons, pour $\alpha > 0$ et $k \geq 3$,

$$J_\alpha := \{x \in [a, b] : |\phi^{(k-1)}(x)| \leq \alpha\}.$$

C'est un intervalle fermé, noté $[a_\alpha, b_\alpha]$. L'hypothèse de récurrence implique que

$$\left| \int_a^{a_\alpha} e^{i\phi(x)} dx \right| + \left| \int_{b_\alpha}^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq 2 \frac{3^{k-1}}{\alpha^{1/(k-1)}}.$$

L'intégrale sur $[a_\alpha, b_\alpha]$ est plus petite que $b_\alpha - a_\alpha$, que l'on majore par

$$b_\alpha - a_\alpha \leq \frac{2\alpha}{\inf_{a \leq x \leq b} |\phi^{(k)}(x)|}.$$

On a donc montré que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\left| \int_a^b e^{i\phi(x)} dx \right| \leq 2 \frac{3^{k-1}}{\alpha^{1/(k-1)}} + \frac{2\alpha}{\inf_{a \leq x \leq b} |\phi^{(k)}(x)|}.$$

On conclut en appliquant cette inégalité avec $\alpha = \left(\inf_{a \leq x \leq b} |\phi^{(k)}(x)| \right)^{(k-1)/k}$. □

Nous allons maintenant démontrer un résultat plus fort que la Proposition 19.1 (qui s'en déduit en appliquant l'estimation suivante avec $k = 2$ et $\varphi = \lambda\phi$).

Proposition 19.6. *Soit $k \geq 2$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, toute phase $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$ telle que $\varphi^{(k)}$ ne s'annule pas sur $[a, b]$ et toute amplitude $\psi \in C^1(\mathbb{R})$,*

$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)} \psi(x) dx \right| \leq \frac{3^k}{\left(\inf_{a \leq x \leq b} |\varphi^{(k)}(x)| \right)^{1/k}} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right).$$

Démonstration. D'après le lemme 19.5, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\left| \int_a^x e^{i\varphi(s)} ds \right| \leq \frac{3^k}{\left(\inf_{a \leq x \leq b} |\varphi^{(k)}(x)| \right)^{1/k}}.$$

Ce qui implique l'estimation désirée grâce à l'identité

$$\int_a^b e^{i\varphi(x)} \psi(x) dx = \psi(b) \int_a^b e^{i\varphi(s)} ds - \int_a^b \psi'(x) \left(\int_a^x e^{i\varphi(s)} ds \right) dx,$$

qui se démontre par intégration par parties. □

Si on utilise le lemme 19.3 au lieu du lemme 19.5 dans la démonstration précédente, on obtient l'estimation correspondant à $k = 1$.

Proposition 19.7. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, toute phase $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ telle que φ' est monotone et ne s'annule pas sur $[a, b]$ et toute amplitude $\psi \in C^1(\mathbb{R})$,*

$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)} \psi(x) dx \right| \leq \frac{3}{\inf_{a \leq x \leq b} |\varphi'(x)|} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right).$$

Solution : une estimation de Kenig, Ponce et Vega

Nous allons démontrer le résultat suivant de C. Kenig, G. Ponce et L. Vega.

Proposition 19.8. *Il existe une constante C telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $R > 0$,*

$$\left| \int_{-R}^R e^{i(x\xi+t\xi^2)} |\xi|^{-1/2} d\xi \right| \leq C |x|^{-1/2}.$$

Démonstration. Déjà l'intégrale est bien définie car $|\xi|^{-1/2}$ est intégrable au voisinage de l'origine. Pour l'estimer, nous faisons le changement de variables $\eta = x\xi$, qui donne

$$\left| \int_{-R}^R e^{i(x\xi+t\xi^2)} |\xi|^{-1/2} d\xi \right| = \frac{|x|^{1/2}}{x} \int_{-\rho}^{\rho} e^{i(\eta+\tau\eta^2)} |\eta|^{-1/2} d\eta,$$

avec $\tau = t/x^2$ et $\rho = xR$. Il nous suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$|I(\rho, \tau)| = \left| \int_{-\rho}^{\rho} e^{i(\eta+\tau\eta^2)} |\eta|^{-1/2} d\eta \right| \leq C.$$

Comme $I(\rho, \tau) = \overline{I(\rho, -\tau)}$, on note que l'on peut sans perdre de généralité supposer que $\tau \geq 0$. Aussi, on peut toujours supposer $\rho > 0$.

Pour traiter la singularité à l'origine de l'amplitude, introduisons une fonction plateau $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi(\eta) = 1 \text{ si } \eta \in [-1, 1], \quad \chi(\eta) = 0 \text{ si } \eta \notin [-2, 2].$$

Puisque $\chi(\eta) |\eta|^{-1/2} \in L^1(\mathbb{R})$ il suffit pour conclure d'estimer

$$\left| \int_{-\rho}^{\rho} e^{i(\eta+\tau\eta^2)} (1 - \chi(\eta)) |\eta|^{-1/2} d\eta \right|.$$

Posons

$$\varphi(\eta) = \eta + \tau\eta^2, \quad \psi(\eta) = (1 - \chi(\eta)) |\eta|^{-1/2}.$$

La discussion s'organise alors en fonction de l'annulation de la dérivée de la phase : nous décomposons l'intervalle d'intégration en trois intervalles (éventuellement vides),

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{\eta \in [-\rho, \rho] : 1 + \tau\eta \leq -1/2\}, \\ I_2 &:= \{\eta \in [-\rho, \rho] : -1/2 < 1 + \tau\eta < 1/2\}, \\ I_3 &:= \{\eta \in [-\rho, \rho] : 1 + \tau\eta \geq 1/2\}. \end{aligned}$$

La raison de ce découpage est que sur I_1 et sur I_3 la phase φ est strictement croissante et ne s'annule pas, donc la proposition 19.7 implique que

$$\left| \int_{I_1 \cup I_3} e^{i(\eta + \tau\eta^2)} \psi(\eta) d\eta \right| \leq 6 \left(|\psi(\sup I_3)| + |\psi(\sup I_1)| + 2 \int_{-\rho}^{\rho} |\psi'(\eta)| d\eta \right).$$

Comme $0 \leq \psi \leq 1$ et que $\psi' \in L^1(\mathbb{R})$, on vérifie que le membre de droite est uniformément borné.

Il reste à estimer l'intégrale sur I_2 . Pour cela, récrivons l'intégrale sous la forme

$$\tau^{1/2} \int_{I_2} e^{i(\eta + \tau\eta^2)} \frac{(1 - \chi(\eta))}{|\tau\eta|^{1/2}} d\eta.$$

Comme sur I_2 on a $|\tau\eta| \geq 1/2$, on en déduit,

$$\left| \int_{I_2} e^{i(\eta + \tau\eta^2)} \psi(\eta) d\eta \right| \leq 2\tau^{1/2} \left| \int_{I_2} e^{i(\eta + \tau\eta^2)} (1 - \chi(\eta)) d\eta \right|.$$

Ainsi, la proposition 19.6 appliquée sur l'intervalle I_2 implique que

$$\left| \int_{I_2} e^{i(\eta + \tau\eta^2)} \psi(\eta) d\eta \right| \leq 20 \left(|(1 - \chi(\sup I_2))| + \int_{-\rho}^{\rho} |\chi'(\eta)| d\eta \right).$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Chapitre 20

Problèmes sur la continuité des opérateurs pseudo-différentiels

20.1 Continuité sur les espaces de Hölder

On notera $C, C_\alpha, C_{\alpha,\beta}, \dots$ des constantes absolues (où C_α dépend du multi-indice α ...) qui ne dépendent ni des symboles, ni des inconnues.

Le but de ce problème est d'étudier l'action d'un opérateur pseudo-différentiel

$$\text{Op}(p)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi,$$

sur les espaces de Hölder $C^{0,r}(\mathbb{R}^n)$ avec $r \in]0, 1[$.

***** Préliminaire *****

Fixons $M > 0$. Soit $q(x, \xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à support dans $\{(x, \xi) : |\xi| \leq 3\}$. On suppose que, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \leq \frac{n}{2} + 2$, on a

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad |\partial_\xi^\beta q(x, \xi)| \leq M.$$

1. Introduisons $Q(x, z) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz \cdot \xi} q(x, \xi) \, d\xi$. En utilisant la relation $\partial_\xi e^{iz \cdot \xi} = iz e^{iz \cdot \xi}$, montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on peut écrire la fonction $z \mapsto z^\alpha Q(x, z)$ sous la forme d'une transformée de Fourier d'une fonction que l'on précisera.
2. En déduire que, pour tout $|\alpha| \leq (n/2) + 2$, il existe une constante C_α telle que

$$\int |z|^{2\alpha} |Q(x, z)|^2 \, dz \leq C_\alpha M^2.$$

Puis en déduire que $\int |Q(x, z)| \, dz \leq CM$.

3. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\text{Op}(q)f(x) = \int Q(x, x-y)f(y) dy$ puis en déduire

$$\|\text{Op}(q)f\|_{L^\infty} \leq CM \|f\|_{L^\infty}.$$

***** Théorème de Stein *****

Considérons un symbole $p = p(x, \xi)$ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et tel que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{-|\beta|}.$$

Nous avons montré en cours que $\text{Op}(p)$ est borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nous allons montrer dans ce problème que $\text{Op}(p)$ est borné de $C^{0,r}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même pour tout $r \in]0, 1[$.

On rappelle que les espaces de Hölder peuvent être étudiés à l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley. Pour fixer les notations, rappelons qu'il existe deux fonctions χ_0 et χ , C^∞ sur \mathbb{R}^n , à support respectivement dans la boule $\{|\xi| \leq 1\}$ et dans la couronne $\{1/3 \leq |\xi| \leq 3\}$ et telles que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \chi_0(\xi) + \sum_{j=0}^{+\infty} \chi(2^{-j}\xi) = 1.$$

Introduisons

$$p_{-1}(x, \xi) = p(x, \xi)\chi_0(\xi), \quad p_j(x, \xi) = p(x, \xi)\chi(2^{-j}\xi) \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\beta| \leq (n/2) + 2$, on a

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\beta p_{-1}(x, \xi)| &\leq M, \\ |\partial_\xi^\beta p_j(x, \xi)| &\leq M2^{-j|\beta|} \quad (\forall j \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

2. Montrer que

$$\|\text{Op}(p_{-1})f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}.$$

3. Soit $a = a(x, \xi)$ un symbole et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Posons $b(x, \xi) = a\left(\frac{x}{\lambda}, \lambda\xi\right)$. Notons H_λ l'application qui à la fonction $u = u(x)$ associe

$$(H_\lambda u)(x) = u(\lambda x).$$

Montrer que $\text{Op}(a) = H_\lambda \circ \text{Op}(b) \circ H_\lambda^{-1}$ et en déduire que, si $\text{Op}(b)$ est borné de L^∞ dans L^∞ , alors $\text{Op}(a)$ l'est également et ils ont alors la même norme.

4. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, montrer que l'on peut choisir λ_j de sorte que $\tilde{p}_j(x, \xi) = p_j(\lambda_j^{-1}x, \lambda_j\xi)$ soit à support dans $\{(x, \xi) : |\xi| \leq 3\}$. En déduire que

$$\|\text{Op}(p_j)f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}.$$

5. Introduisons $f_{-1} = \chi_0(D_x)f$ et $f_k = \chi(2^{-k}D_x)f$ pour $k \geq 0$. Montrer que

$$\text{Op}(p_j)f = \sum_{|j-k| \leq 3} \text{Op}(p_j)f_k.$$

6. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\|\text{Op}(p_j)f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{C^{0,r}} 2^{-jr}.$$

7. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq 1$. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, on a

$$\partial_x^\alpha \text{Op}(p_j) = \text{Op}(q_j) \quad \text{où} \quad q_j(x, \xi) = ((i\xi + \partial_x)^\alpha p_j)(x, \xi).$$

En répétant les étapes précédentes, montrer que

$$\|\partial_x^\alpha \text{Op}(p_j)f\|_{L^\infty} \leq C_\alpha 2^{j(|\alpha|-r)} \|f\|_{C^{0,r}}.$$

8. (*) Soit (f_j) une suite de fonctions $C^1(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient

$$\|\partial_x^\alpha f_j\|_{L^\infty} \leq M 2^{j(|\alpha|-r)} \quad \text{pour tout } |\alpha| \leq 1.$$

Montrer que $f = \sum f_j$ appartient à $C^{0,r}(\mathbb{R}^n)$ et que sa norme est bornée par CM .

9. Conclure : $\text{Op}(p)$ est borné de $C^{0,r}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même pour tout $r \in]0, 1[$. Que peut-on dire pour $r = 0$?

***** Relation entre L^∞ et C_*^0 *****

- i) Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et toute fonction f appartenant à l'espace de Hölder $C^{0,\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\varepsilon} \|f\|_{C_*^0} \log \left(e + \frac{\|f\|_{C^{0,\varepsilon}}}{\|f\|_{C_*^0}} \right).$$

Indication : utiliser la décomposition de Littlewood-Paley et, pour $N \in \mathbb{N}$ à choisir, écrire que

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{q \leq N-1} \|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q \geq N} \|\Delta_q f\|_{L^\infty}.$$

- ii) Considérons la distribution

$$u = \sum_{q=0}^{\infty} e^{i2^q x}.$$

Montrer que $u \in C_*^0 \setminus L^\infty$.

20.2 Continuité sur les espaces de Sobolev uniformément locaux

Exercice 1 : espace L^2 uniformément local

1. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction à valeurs dans \mathbb{R}_+ et qui vaut 1 sur le cube $[-1/2, 1/2]^n$.
En utilisant la fonction

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(x - k),$$

montrer qu'il existe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi(x - k) = 1.$$

Etant donné $k \in \mathbb{Z}^n$ on notera χ_k la fonction $\chi_k(x) = \chi(x - k)$.

2. On note $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions localement L^2 . Par définition, l'espace L^2 uniformément local, noté $L_{ul}^2(\mathbb{R}^n)$, est l'espace des fonctions $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|u\|_{L_{ul}^2} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\chi_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$

où χ_k est définie à la question précédente.

- a) Montrer que $L_{ul}^2(\mathbb{R}^n)$ (muni de cette norme) est un espace de Banach.
- b) Donner des exemples de fonctions qui appartiennent à $L_{ul}^2(\mathbb{R}^n)$ et qui n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- c) Donner un exemple d'espace de fonctions régulières qui est dense dans $L_{ul}^2(\mathbb{R}^n)$.
Donner un exemple d'espace de fonctions régulières qui n'est pas dense dans $L_{ul}^2(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 2 : continuité sur l'espace L^2 uniformément local

Considérons un symbole $p \in S^0$, c'est-à-dire une fonction $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{-|\beta|} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

On souhaite montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in L_{ul}^2(\mathbb{R}^n)$,

$$(20.2.1) \quad \|\text{Op}(p)u\|_{L_{ul}^2} \leq C \|u\|_{L_{ul}^2}.$$

Par soucis de simplicité, afin de pouvoir justifier facilement les calculs faits sur des intégrales, nous supposerons que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. En particulier, dans ce

cas on sait que $\text{Op}(u)$ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Le but est de démontrer l'estimation (20.2.1), où la constante C ne dépend que des semi-normes $M_N(p)$ de p dans S^0 , où rappelons que $M_N(p)$ est définie par

$$M_N(p) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq N} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)|.$$

Pour cela on fixe $k \in \mathbb{N}$ et on cherche à estimer $\chi_k \text{Op}(u)$. Nous utiliserons la notation $|x|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$. L'idée est de d'utiliser la décomposition

$$\chi_k \text{Op}(p)u = A + \sum_{|k-q|_\infty \geq 3} B_{k,q}$$

où

$$A = \sum_{|k-q|_\infty \leq 2} \chi_k \text{Op}(p)\chi_q u, \quad B_{k,q} = \chi_k \text{Op}(p)\chi_q u.$$

On notera C_ℓ , $\ell = 1, \dots, 6$, des constantes qui ne dépendent que des semi-normes de p dans S^0 et qui ne dépendent pas de k .

1. Montrer que $\|A\|_{L^2} \leq C_1 \|u\|_{L^2_{ul}}$.
2. Rappelons la notation $\langle \zeta \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{1/2}$. On souhaite montrer que

$$(20.2.2) \quad \|B_{k,q}\|_{L^2} \leq \frac{C_2}{\langle k-q \rangle^{n+1}} \|u\|_{L^2_{ul}}.$$

- a) Montrer que $\|B_{k,q}\|_{L^2} \leq C_3 \|B_{k,q}\|_{L^\infty}$ et que

$$B_{k,q}(x) = \int K(x,y)\chi_q(y)u(y) dy$$

où

$$K(x,y) = \frac{\chi_k(x)\tilde{\chi}_q(y)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) d\xi$$

pour une certaine fonction $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\tilde{\chi} = 1$ sur le support de χ .

- b) Montrer que l'on peut faire une hypothèse supplémentaire sur χ et que l'on peut choisir $\tilde{\chi}$ de sorte que sur le support de $\chi_k(x)\tilde{\chi}_q(y)$ on a

$$|x-y|_\infty \geq \delta |k-q|_\infty \quad \text{avec} \quad \delta > 0.$$

- c) En déduire que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_4}{\langle k-q \rangle^{n+1}} |\tilde{\chi}_q(y)|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

puis montrer que

$$|B_{k,q}(x)| \leq \frac{C_5}{\langle k-q \rangle^{n+1}} \|\chi_q u\|_{L^2}.$$

- d) En déduire l'inégalité (20.2.2).

3. Démontrer le résultat souhaité : il existe une constante $C_6 > 0$ telle que

$$\| \text{Op}(p)u \|_{L^2_{ul}} \leq C_6 \| u \|_{L^2_{ul}},$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3 : un opérateur non borné sur L^2

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{supp } \chi \subset \{ \xi \in \mathbb{R}, 2^{-1/2} \leq |\xi| \leq 2^{1/2} \}, \quad \chi(\xi) = 1 \quad \text{si } 2^{-1/4} \leq |\xi| \leq 2^{1/4}.$$

Posons

$$a(x, \xi) = \sum_{j=1}^{+\infty} \exp(-i2^j x) \chi(2^{-j} \xi).$$

1. Montrer que $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifie

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{|\alpha| - |\beta|} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2, \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2.$$

Est-ce que a appartient à S^0 ou à $C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$?

2. Soit f_0 une fonction de la classe de Schwartz dont la transformée de Fourier $\widehat{f_0}$ est à support dans l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Pour $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_N(x) = \sum_{j=2}^N \frac{1}{j} \exp(i2^j x) f_0(x).$$

En utilisant la formule de Plancherel, montrer que

$$\| f_N \|_{L^2}^2 = \left(\sum_{j=2}^N j^{-2} \right) \| f_0 \|_{L^2}^2 \leq c.$$

3. Montrer que

$$\text{Op}(a)f_N = \left(\sum_{j=2}^N j^{-1} \right) f_0.$$

4. Conclure.

Complément : généralisation de l'exercice 2 aux espaces de Sobolev uniformément locaux

Soit $s \in \mathbb{R}$. Par définition l'espace de Sobolev uniformément local d'ordre s , noté $H_{ul}^s(\mathbb{R}^d)$, est l'espace des distributions $u \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\| u \|_{H_{ul}^s} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \| \chi_k u \|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$

où χ_k est comme définie précédemment. Ces espaces ont été introduits par Kato.

Considérons un symbole $p \in S^m$, c'est-à-dire une fonction $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

On souhaite montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\text{Op}(p)u\|_{H_{ul}^s} \leq C \|u\|_{H_{ul}^{s+m}},$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, où C ne dépend que de semi-normes de p dans S^m .

Pour cela on procède comme à l'exercice précédent : on introduit la décomposition $\chi_k \text{Op}(u) = A + B$ et on commence par estimer A . Pour estimer B , on montrera ici la propriété suivante : pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\|\partial_x^\alpha B_{k,q}\|_{L^2} \leq \frac{C_d}{\langle k - q \rangle^{n+1}} \|u\|_{H_{ul}^{s+m}}.$$

Complément :

- Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $W^{m, \infty}(\mathbb{R}^n) \subset H_{ul}^m(\mathbb{R}^n)$.
- Soit s tel que $n/2 < s < n/2 + 1$. Montrer que $H_{ul}^s(\mathbb{R}^n) \subset C^{0, s-n/2}(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $0 < \alpha < \alpha' < 1$. Montrer que $C^{0, \alpha'}(\mathbb{R}^n) \subset H_{ul}^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 21

Problèmes sur les applications du calcul symbolique

21.1 Factorisation d'une équation elliptique

Fixons $n \geq 1$. Dans cet exercice on considère deux variables, $x \in \mathbb{R}^n$ et $z \in [0, 1]$, qui jouent des rôles bien distincts. Par comparaison avec l'étude des équations d'évolution hyperboliques, disons que la variable z joue le rôle d'une variable de temps (c'est-à-dire le rôle d'un paramètre). Pour éviter les confusions, nous noterons, dans cet exercice uniquement, ∇_x le gradient par rapport à x et $\Delta_x u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u$.

Considérons une fonction $\eta = \eta(x)$, C^∞ et bornée ainsi que toutes ses dérivées sur \mathbb{R}^n . On note

$$\alpha = \frac{1}{1 + |\nabla_x \eta|^2}, \quad \beta = -\frac{2}{1 + |\nabla_x \eta|^2} \nabla_x \eta, \quad \gamma = \frac{\Delta_x \eta}{1 + |\nabla_x \eta|^2},$$

et on considère l'opérateur

$$P(\eta) = \partial_z^2 + \alpha \Delta_x + \beta \cdot \nabla_x \partial_z - \gamma \partial_z.$$

Le but de cet exercice est de factoriser $P(\eta)$. Par exemple, si $\eta = 0$, on a

$$P(0) = \partial_z^2 + \Delta_x = (\partial_z - |D_x|)(\partial_z + |D_x|),$$

où $|D_x|$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|$.

Question préliminaire. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $\dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$ la classe des fonctions $a = a(x, \xi)$, qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}_x^n \times (\mathbb{R}_\xi^n \setminus \{0\})$, telles que pour tout multi-indices α, β dans \mathbb{N}^n on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ (1 + |\xi|)^{-m+|\beta|} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \right\} < +\infty.$$

La seule différence par rapport à la classe $S^m(\mathbb{R}^n)$ étudiée en cours est que le sup en ξ est pris sur l'ensemble $\{|\xi| \geq 1\}$ au lieu de \mathbb{R}^n . Introduisons une fonction $\chi = \chi(\xi)$, C^∞ et telle que

$$\chi(\xi) = 1 \quad \text{si} \quad |\xi| \geq 2, \quad \chi(\xi) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \leq 1.$$

a) Soit $a \in \dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\chi a = \chi(\xi)a(x, \xi)$ appartient à la classe $S^m(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $(\chi^2 - \chi)a$ appartient à $S^{-k}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k \geq 0$.

On note $\dot{\text{Op}}(a)$ l'opérateur défini par

$$\dot{\text{Op}}(a) = \text{Op}(a\chi).$$

b) Montrer que si $a \in \dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$ et $b \in \dot{S}^{m'}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\dot{\text{Op}}(a)\dot{\text{Op}}(b) = \dot{\text{Op}}(ab) + L_{-1},$$

où L_{-1} est d'ordre $m + m' - 1$ (rappel : on dit qu'un opérateur est d'ordre $m \in \mathbb{R}$ s'il est borné de $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$). De même, montrer que

$$\dot{\text{Op}}(a)\dot{\text{Op}}(b) = \dot{\text{Op}}\left(ab + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right) + L_{-2}$$

où L_{-2} est d'ordre $m + m' - 2$.

1. Considérons deux symboles $a = a(x, \xi)$, $A = A(x, \xi)$ vérifiant

$$\begin{aligned} a &= a^{(1)} + a^{(0)} & \text{où} & \quad a^{(1)} \in \dot{S}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad a^{(0)} \in \dot{S}^0(\mathbb{R}^n), \\ A &= A^{(1)} + A^{(0)} & \text{où} & \quad A^{(1)} \in \dot{S}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad A^{(0)} \in \dot{S}^0(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

et tels que

$$\begin{aligned} (*) \quad & a^{(1)}A^{(1)} + \frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)} \cdot \partial_x A^{(1)} + a^{(1)}A^{(0)} + a^{(0)}A^{(1)} = -\alpha |\xi|^2, \\ & a + A = -i\beta \cdot \xi + \gamma. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha \Delta_x - \dot{\text{Op}}(a)\dot{\text{Op}}(A), \\ R_1 &= \dot{\text{Op}}(a) + \dot{\text{Op}}(A) + \beta \cdot \nabla_x - \gamma. \end{aligned}$$

Montrer que R_0 est d'ordre 0.

Montrer que R_1 est régularisant (d'ordre $-m$ pour tout $m \geq 0$).

2. Résoudre le système suivant par un calcul :

$$\begin{cases} a^{(1)}(x, \xi)A^{(1)}(x, \xi) = -\alpha(x) |\xi|^2, \\ a^{(1)}(x, \xi) + A^{(1)}(x, \xi) = -i\beta(x) \cdot \xi. \end{cases}$$

Vérifier que l'on définit ainsi deux symboles qui appartiennent à $\dot{S}^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Montrer qu'il existe deux symboles $a^{(0)}, A^{(0)}$ appartenant à $\dot{S}^0(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$a^{(0)}A^{(1)} + a^{(1)}A^{(0)} + \frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)} \cdot \partial_x A^{(1)} = 0, \quad a^{(0)} + A^{(0)} = \gamma.$$

4. En combinant les résultats des questions précédentes, on obtient la proposition suivante : Il existe deux symboles $a = a(x, \xi), A = A(x, \xi)$ appartenant à $\dot{S}^1(\mathbb{R}^n)$, tels que

$$(**) \quad \partial_z^2 + \alpha\Delta + \beta \cdot \nabla \partial_z - \gamma \partial_z = (\partial_z - \text{Op}(a))(\partial_z - \text{Op}(A)) + R_0 + R_1 \partial_z,$$

où R_0 est un opérateur d'ordre 0 et R_1 est régularisant.

Etant donné $k \in \mathbb{N}$, expliquer comment obtenir une factorisation similaire avec un reste R_0 d'ordre $-k$.

21.2 Régularité parabolique

Le but de ce problème est d'étudier une équation d'évolution **parabolique**, dont l'exemple le plus simple est l'EDP

$$\partial_t w + |D_x| w = 0,$$

avec $t \in [0, +\infty[, x \in \mathbf{R}^n$.

1. Calculer la solution à l'aide de la transformée de Fourier puis montrer que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \| |D_x|^{\frac{1}{2}} w(s) \|_{L^2}^2 ds \leq K \|w(0)\|_{L^2}^2.$$

Le but des questions suivantes est de montrer un effet régularisant pour une équation parabolique pseudo-différentielle. On souhaite démontrer la proposition suivante.

Proposition. Fixons $T > 0$ et considérons un symbole $a \in S^1(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles vérifiant

$$\exists c > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad a(x, \xi) \geq c \langle \xi \rangle = c(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons que $w \in C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ est solution du problème de Cauchy

$$\partial_t w + \text{Op}(a)w = f, \quad w(0) = 0,$$

où $f \in C^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $w(T) = w|_{t=T}$ vérifie

$$w(T) \in H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

2. Pour $t \in [0, T]$, introduisons le symbole

$$e_t(x, \xi) := \exp((t - T)a(x, \xi)),$$

de sorte que $e_T = 1$ et $\partial_t(e_t) = e_t a$. Considérons $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ (pour simplifier). Montrer que, pour tout $m \geq 0$, il existe des constantes $C_{m\alpha\beta}$ telles que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta e_t(x, \xi) \right| \leq \frac{C_{m\alpha\beta}}{(T - t)^m} (1 + |\xi|)^{-m - |\beta|},$$

pour tout $t \in [0, T]$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Puis montrer que le résultat précédent est vrai pour tout multi-indices α, β .

3. En déduire que, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, il existe une constante K_ε telle que, pour tout $t \in [0, T]$ et tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on a les inégalités

$$\|\text{Op}(e_t)u\|_{H^{1-\varepsilon}} \leq \frac{K_\varepsilon}{(T - t)^{1-\varepsilon}} \|u\|_{L^2},$$

$$\|(\text{Op}(\partial_t e_t) - \text{Op}(e_t) \text{Op}(a))u\|_{H^{1-\varepsilon}} \leq \frac{K_\varepsilon}{(T - t)^{1-\varepsilon}} \|u\|_{L^2}.$$

4. Vérifier que

$$w(T) = \int_0^T (\text{Op}(\partial_t e_t) - \text{Op}(e_t) \text{Op}(a))w(t) dt + \int_0^T \text{Op}(e_t)f(t) dt.$$

En déduire que $w(T) \in H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, ce qui conclura la démonstration.

21.3 Effet régularisant pour Schrödinger et d'Airy

Soit $n \geq 1$. On note $L^2(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes et de carré intégrable, muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Etant donnés deux opérateurs A et B , on note AB l'opérateur composé et $[A, B] = AB - BA$ le commutateur de A et B .

Soit $m \in \mathbb{N}$. Considérons un symbole $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ et posons $A = \text{Op}(a)$. On note A^* l'adjoint de A et on suppose que $A - A^*$ est un opérateur d'ordre 0, de sorte que

$$(21.3.1) \quad \forall f \in H^m(\mathbb{R}^n), \quad \|Af - A^*f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq K_0 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On fixe un temps $T > 0$ et on considère une fonction $u \in C^1([0, T]; H^m(\mathbb{R}^n))$ solution de

$$(21.3.2) \quad \partial_t u = iAu.$$

On admet l'existence d'une telle solution.

1. Considérons les opérateurs suivants :

- $A_1 = \Delta$;
- $A_2 = \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla\cdot)$ où $\gamma \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ (ce qui signifie que γ est une fonction à valeurs réelles, C^∞ et bornée sur \mathbb{R}^n , ainsi que toutes ses dérivées) ;
- $n = 1$ et $A_3 = i\partial_x^3 + iV(x)\partial_x$ où $V \in C_b^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Écrire ces opérateurs sous la forme $A_j = \operatorname{Op}(a_j)$ où a_j est un symbole d'ordre m_j (pour un m_j à préciser). Puis vérifier que ces opérateurs vérifient l'hypothèse (21.3.1).

2. Soit $f, g \in C^1([0, T]; H)$ où H est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$. Montrer que la fonction $(f, g)_H : t \mapsto (f(t), g(t))_H$ est C^1 et que

$$\frac{d}{dt}(f(t), g(t))_H = \left(\frac{df}{dt}(t), g(t) \right)_H + \left(f(t), \frac{dg}{dt}(t) \right)_H.$$

Considérons un symbole $b = b(x, \xi)$ appartenant à $S^0(\mathbb{R}^n)$. On pose $B = \operatorname{Op}(b)$. Montrer que

$$\frac{d}{dt}(Bu(t), u(t)) = (i[B, A]u(t), u(t)) + (Bu(t), i(A - A^*)u(t)).$$

3. En appliquant ceci avec $b = 1$ montrer que $\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq K_0 \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$, où K_0 est définie par (21.3.1), puis qu'il existe une constante K_1 ne dépendant que de T et K_0 telle que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq K_1 \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

4. Soit $b \in S^0(\mathbb{R}^n)$ quelconque. Posons

$$C = i[B, A].$$

Déduire des questions précédentes qu'il existe une constante K_2 (ne dépendant que de T, A, B) telle que

$$\int_0^T (Cu(t), u(t)) dt \leq K_2 \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

5. Supposons $n = 1$ et $A = \partial_x^2$.

a. Écrire C sous la forme $\operatorname{Op}(p) + R$ où $p \in S^1(\mathbb{R})$ est un symbole dépendant de b à calculer et R un opérateur d'ordre 0. Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante K_3 ne dépendant que de T, A, B telle que

$$\int_0^T (\operatorname{Op}(p)u(t), u(t)) dt \leq K_3 \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

b. Choisissons

$$b(x, \xi) = -\frac{1}{2} \frac{\xi}{\langle \xi \rangle} \int_0^x \frac{dy}{\langle y \rangle^2} \quad \text{où} \quad \langle \zeta \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{1/2}.$$

Vérifier que $b \in S^0(\mathbb{R})$ puis que $\text{Op}(p) = -\langle x \rangle^{-2} \Lambda^{-1} \partial_x^2$ où $\Lambda^{-1} = \text{Op}(\langle \xi \rangle^{-1})$.

c. En déduire qu'il existe une constante K_4 (ne dépendant que de T, A) telle que

$$\int_0^T \left\| \partial_x \Lambda^{-\frac{1}{2}} (\langle x \rangle^{-1} u(t)) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq K_4 \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Montrer alors que

$$(21.3.3) \quad \int_0^T \left\| \langle x \rangle^{-1} u(t) \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}^2 dt \leq K_4 \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

6. Supposons $n = 1$ et $A = i\partial_x^3 + iV(x)\partial_x$. Soit $M > 0$ et considérons une fonction croissante $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = x$ si $|x| \leq M$ et $\varphi'(x) = 0$ si $|x| \geq 2M$. Posons $b(x, \xi) = \varphi(x)$ (indépendant de ξ). Ecrire C sous la forme $\text{Op}(p) + R$ où R est d'ordre 0 (attention à utiliser le calcul symbolique avec le bon ordre) et vérifier que $C = 3\partial_x(\varphi'(x)\partial_x \cdot) + R$ où R est d'ordre 0. En déduire que

$$\int_0^T \int_{-M}^M |\partial_x u(t, x)|^2 dx dt \leq K \int_{\mathbb{R}} |u(0, x)|^2 dx,$$

pour une constante K ne dépendant que de T et de M .

7. (*) Montrer que l'estimation (21.3.3) est vraie pour $A = \Delta$ en dimension n quelconque.

21.4 Sommes de carrés de champs de vecteurs

Avertissement : ce problème est **très difficile**.

Le but est de montrer un résultat célèbre de Lars Hörmander sur l'hypoellipticité de certains sommes de carrés de champs de vecteurs.

*** Notations ***

On considère uniquement des fonctions à valeurs réelles définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$ un entier quelconque. Etant donné $s \in \mathbb{R}$, on note $H^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev d'ordre s et $\langle D_x \rangle^s$ le multiplicateur de Fourier de symbole $\langle \xi \rangle^s = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$. On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x) dx$. On pensera à **utiliser** :

- l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- le fait que $\|u\|_{H^s} = (2\pi)^{-n/2} \|\langle D_x \rangle^s u\|_{L^2}$;
- la dualité : $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$ et $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{-s}}$ pour $s \in \mathbb{R}$.

Etant donnés deux opérateurs A et B , on note AB le composé $A \circ B$ (donc $A^2 = A \circ A$) et $[A, B] = AB - BA$ leur commutateur.

On s'intéresse dans ce problème à l'opérateur d'ordre 2

$$L = \sum_{1 \leq j \leq m} X_j^2,$$

où X_1, \dots, X_m sont opérateurs différentiels d'ordre 1 : pour $1 \leq j \leq m$, X_j est défini par

$$(X_j u)(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x),$$

où $a_{i,j}$ est C^∞ sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} pour tout $1 \leq i \leq n$. Noter que l'on suppose seulement que fonctions $a_{i,j}$ sont C^∞ (et pas C^∞ et bornées ainsi que leurs dérivées). Par exemple, on souhaite étudier le cas $L = \partial_x^2 + x^2 \partial_y^2 = X_1^2 + X_2^2$ avec $X_1 = \partial_x$ et $X_2 = x \partial_y$.

***** Questions préliminaires *****

1. Montrer que l'adjoint X_j^* de X_j vérifie $X_j^* u = -X_j u + c_j u$ où $c_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une fonction que l'on déterminera. C'est-à-dire montrer que pour tout $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (X_j u)(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-u(x)(X_j v)(x) + c_j(x)u(x)v(x)) dx.$$

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\sum_{1 \leq j \leq m} \|X_j u\|_{L^2}^2 \leq C \|Lu\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

***** Etude d'une classe d'opérateurs *****

Fixons un ouvert V borné.

On note Ψ_V^0 l'ensemble des opérateurs $P \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$Pu = \varphi_1 \text{Op}(a)(\varphi_2 u)$$

avec

- $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\text{supp } \varphi_k \subset V$ pour $k = 1, 2$;
- a est un symbole appartenant à valeurs complexes appartenant à S^0 .

Soit $\varepsilon \in]0, 1/2]$. On note \mathcal{A}_ε l'ensemble des opérateurs $P \in \Psi_V^0$ tels que

$$\exists C > 0 / \forall u \in C_0^\infty(V), \quad \|Pu\|_{H^\varepsilon}^2 \leq C \|Lu\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

1. Montrer que si P_1 et P_2 appartiennent à Ψ_V^0 alors $P_1 P_2 \in \Psi_V^0$ et $P_1^* \in \Psi_V^0$.
2. Montrer que si $P \in \mathcal{A}_\varepsilon$ alors $P^* \in \mathcal{A}_\varepsilon$.

3. Montrer que tout $\varepsilon \in]0, 1/2]$, \mathcal{A}_ε est stable par composition à gauche ou à droite par un pseudo de Ψ_V^0 : si $P \in \mathcal{A}_\varepsilon$ et $Q \in \Psi_V^0$, alors

$$QP \in \mathcal{A}_\varepsilon, \quad PQ \in \mathcal{A}_\varepsilon.$$

4. Soit θ_1 et θ_2 deux fonctions C^∞ à support compact telles que $\text{supp } \theta_k \subset V$ pour $k = 1, 2$ et $\theta_1 \equiv 1$ sur le support de θ_2 . Introduisons l'opérateur S défini par

$$Su = \theta_1 \langle D_x \rangle^{-1} (\theta_2 u).$$

Montrer que $X_j S \in \Psi_V^0$. Montrer de plus que, pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $\varepsilon \in [0, 1/2]$, on a

$$X_j S \in \mathcal{A}_\varepsilon.$$

5. Soit $\varepsilon, \delta \in]0, 1/2]$ avec $\delta \leq \varepsilon/2$. Considérons $P \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Nous voulons montrer dans cette question que

$$[X_j, P] \in \mathcal{A}_\delta$$

pour tout $1 \leq j \leq n$.

(a) Ecrire $\|[X_j, P]u\|_{H^\delta}^2$ sous la forme $\langle [X_j, P]u, Tu \rangle$ où $T = \text{Op}(\tau)$ est un opérateur pseudo-différentiel avec $\tau \in S^{2\delta}$.

(b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\langle PX_j u, Tu \rangle| \leq \|X_j u\|_{L^2}^2 + \|TP^* u\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{H^{2\delta-1}}^2.$$

(c) Obtenir une estimation similaire pour $|\langle X_j P u, Tu \rangle|$ et conclure.

6. On note \mathcal{A} l'ensemble des opérateurs $P \in \Psi_V^0$ tels que $P \in \mathcal{A}_\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon \in]0, 1/2]$. C'est-à-dire $P \in \mathcal{A}_\varepsilon$ si et seulement si

$$\exists \varepsilon \in]0, 1/2], \exists C > 0 / \forall u \in C_0^\infty(V), \quad \|Pu\|_{H^\varepsilon}^2 \leq C \|Lu\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

Soit $1 \leq i, j \leq m$. Montrer que le commutateur $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$ est un opérateur différentiel d'ordre 1.

Montrer que pour tout $1 \leq j, k \leq m$, on a

$$[X_j, X_k] S \in \mathcal{A}.$$

(Indication : observer que $[X_j, X_k] S \in \mathcal{A}$.)

***** Le sous-laplacien sur le groupe de Heisenberg *****

Considérons le cas de la dimension d'espace $n = 3$. Considérons l'opérateur

$$L = X^2 + Y^2$$

avec

$$X = \partial_{x_2} + 2x_1\partial_{x_3}, \quad Y = \partial_{x_1} - 2x_2\partial_{x_3}.$$

1. Soit V un ouvert borné. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq 3$,

$$\exists \varepsilon \in]0, 1/2], \exists C > 0 / \forall u \in C_0^\infty(V), \quad \|\partial_{x_k}(Su)\|_{H^\varepsilon}^2 \leq C \|Lu\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

2. En déduire que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ il existe $\varepsilon > 0$ et une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset K$,

$$\|u\|_{H^\varepsilon}^2 \leq C \|Lu\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

***** Cas général *****

On identifie un opérateur différentiel $X = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \partial_{x_i}$, avec le champ de vecteurs $a = (a_1, \dots, a_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$, on note $X(x)$ le vecteur $a(x) \in \mathbb{R}^n$.

On considère à nouveau un opérateur général $L = \sum_{1 \leq j \leq m} X_j^2$ et on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{vect} \left\{ ([X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}] \dots]](x) : p \leq r, i_k \in \{1, \dots, m\} \right\} = \mathbb{R}^n.$$

(a) Montrer que cette condition est vérifiée pour les deux exemples suivants :

- $n = 2$, $X_1 = \partial_x$ et $X_2 = x\partial_y$.
- $n = 4$ (on note (x, y, z, t) les coordonnées d'un point de \mathbb{R}^4). On considère les deux champs $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \frac{1}{2}x^2\partial_t + x\partial_z + \partial_y$.

(b) Montrer que

$$[X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}] \dots]]S \in \mathcal{A}$$

pour tout p -uplet d'indices.

(c) Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ il existe $\varepsilon > 0$ et une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset K$,

$$\|u\|_{H^\varepsilon}^2 \leq C \|Lu\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

***** Complément *****

1) On considère maintenant l'opérateur

$$\mathcal{L} = \sum_{1 \leq j \leq m} X_j^2 + X_0,$$

où X_0, X_1, \dots, X_m sont $m + 1$ champs comme précédemment.

Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \|X_i u\|_{L^2}^2 \leq C \|\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

On dit que $P \in \Psi_V^0$ appartient à $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ si et seulement si

$$\exists \varepsilon \in]0, 1/2], \exists C > 0 / \forall u \in C_0^\infty(V), \quad \|Pu\|_{H^\varepsilon}^2 \leq C \|\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

Montrer que, avec S comme précédemment et $P \in \Psi_V^0$,

$$X_0 S \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \quad [X_0, P] \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$$

et que, pour tout $0 \leq i, j \leq m$, on a $[X_j, X_k]S \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

En déduire que $\mathcal{A}_{L^r} = \Psi_V^0$ s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{vect} \left\{ ([X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}] \dots]](x) : p \leq r, i_k \in \{0, \dots, m\}) \right\} = \mathbb{R}^n.$$

2) On a donc montré que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset K$,

$$\|u\|_{H^\varepsilon}^2 \leq C \|\mathcal{L}u\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

On dit que c'est une estimation de sous-ellipticité. En utilisant cette estimation et la structure de L , montrer que L est hypoelliptique : ce qui signifie que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie $Lu \in C^\infty(\omega)$ avec $\omega \subset \Omega$ alors $u \in C^\infty(\omega)$.

Néanmoins, un opérateur peut vérifier une estimation de sous-ellipticité sans être hypoelliptique. Considérons par exemple l'opérateur $\square u = (\partial_t^2 - \partial_x^2)u$. Alors cet opérateur n'est pas hypoelliptique (il existe des solutions non C^∞ de $\square u = 0$) mais il vérifie l'estimation précédente. Montrer (de façon directe) qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq C \|\square u\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^2}^2.$$

21.5 Mesures microlocales de défaut

Avertissement : ce problème est **difficile**.

Son but de démontrer la construction de mesures microlocales de défaut. Ces mesures ont été introduites indépendamment par Patrick Gérard et Luc Tartar. Elles jouent un rôle fondamentale dans de nombreux domaines. Le but de ce problème est d'étudier la construction de ces mesures. Pour cela nous suivons l'approche de Patrick Gérard.

*** Notations ***

On considère des fonctions à valeurs complexes définies sur un ouvert quelconque Ω de \mathbb{R}^d avec $d \geq 1$. Précisément, nous considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $L^2_{loc}(\Omega)$ (u_n appartient à $L^2(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$) qui converge faiblement vers 0 au sens où :

$$\forall \varphi \in L^2_{comp}(\Omega), \quad \int_{\Omega} u_n(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

où nous avons noté $L^2_{comp}(\Omega)$ l'espace des fonctions $\varphi \in L^2(\Omega)$ à support compact dans Ω . Le but de ce problème est de caractériser le défaut de convergence forte grâce aux opérateurs pseudo-différentiels.

Dans tout le problème χ désigne une fonction à valeurs réelles telle que $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Si $u \in L^2_{loc}(\Omega)$, alors $\chi u \in L^2(\Omega)$ et on peut étendre χu par 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ pour obtenir une fonction appartenant à $L^2(\mathbb{R}^d)$. On notera toujours cette fonction χu . Cela nous permet de définir la transformée de Fourier de χu , notée $\widehat{\chi u}$, ainsi que $\text{Op}(a)(\chi u)$ pour tout symbole $a \in S^m(\mathbb{R}^d)$ (où m est un nombre réel quelconque).

Etant donné $s \in \mathbb{R}$, on note $H^s(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Sobolev d'ordre s et $\langle D_x \rangle^s$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\langle \xi \rangle^s = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$. On note (u, v) le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, défini par $(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \overline{v(x)} dx$. On pensera à utiliser :

- l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- le fait que $\|u\|_{H^s} = \|\langle D_x \rangle^s u\|_{L^2}$ par définition de la norme $\|\cdot\|_{H^s}$;
- la dualité : pour tout $s \geq 0$, $(u, v) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow |(u, v)| \leq \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{-s}}$.

*** Problème ***

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$.
 - a. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Montrer que : (i) la suite (χu_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$; (ii) la suite $(\widehat{\chi u_n})$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et (iii) pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{\chi u_n}(\xi) = 0$.
 - b. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Montrer que $\|\chi u_n\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^d)}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Indication : écrire

$$\|\chi u_n\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2 d\xi,$$

où R est un grand paramètre.

2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L_{loc}^2(\Omega)$.

a. Montrer que, pour tout symbole $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\text{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n)$ est bornée dans \mathbb{C} .

b. Montrer que, pour tout symbole $\tau \in S^{-1}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$(\text{Op}(\tau)(\chi u_n), \chi u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Rappel [Inégalité de Gårding]. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons un symbole $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ tel que $\text{Re } a(x, \xi) \geq \varepsilon$ pour tout (x, ξ) dans \mathbb{R}^{2d} . Nous avons vu en cours l'inégalité de Gårding qui énonce qu'il existe deux constantes positives c_ε et C_ε telles que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\text{Re}(\text{Op}(a)u, u) \geq c_\varepsilon \|u\|_{L^2}^2 - C_\varepsilon \|u\|_{H^{-1/2}}^2.$$

En particulier on a $\text{Re}(\text{Op}(a)u, u) \geq -C_\varepsilon \|u\|_{H^{-1/2}}^2$.

3. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L_{loc}^2(\Omega)$. Considérons un symbole $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ tel que $\text{Re } a(x, \xi) \geq 0$ pour tout (x, ξ) dans \mathbb{R}^{2d} . Montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{Re}(\text{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) \geq 0.$$

4. Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$. On suppose que a peut s'écrire sous la forme $a = a_0 + a_{-1}$ où a_{-1} appartient à $S^{-1}(\mathbb{R}^d)$ et $a_0 \in S^0(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\text{Im } a_0 = 0$. Montrer que

$$\text{Im}(\text{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

5. Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$. On pose $M = \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}} |a(x, \xi)|$. Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\text{Op}(a)(\chi u_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq MC(\chi) \quad \text{où} \quad C(\chi) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\chi u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Indication : on pourra introduire une fonction $\chi' \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi'\chi = \chi$ ainsi que l'opérateur B défini par $Bv = M^2\chi^2v - \chi \text{Op}(a)^* \text{Op}(a)(\chi v)$.

6. (difficile) Considérons un compact $K \subset \Omega$. Introduisons :

- l'ensemble $C_K^0(\Omega)$ des fonctions continues à support contenu dans K ;
- l'ensemble $C_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$ des fonctions C^∞ sur $\Omega \times S^{d-1}$ et à support dans $K \times S^{d-1}$;
- l'espace $S_K^0(\mathbb{R}^d)$ des symboles $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ qui sont tels que $a(x, \xi)$ est homogène en ξ d'ordre 0 pour $|\xi| \geq 1/2$ et de plus $\text{supp } a \subset K \times \mathbb{R}^d$.

On admet que $C_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$ est séparable (i.e. il existe une partie dénombrable dense).

En déduire qu'il existe une forme linéaire continue $\Lambda_{K,\chi}: S_K^0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $a \in S_K^0(\mathbb{R}^d)$,

$$(\text{Op}(a)(\chi u_n), \chi u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Lambda_{K,\chi}(a).$$

7. Montrer que $\Lambda_{K,\chi}$ ne dépend pas de χ puis démontrer le théorème suivant.

Théorème 21.1. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L_{loc}^2(\Omega)$. Il existe une sous-suite $(u_{\theta(n)})$ et une mesure de Radon μ positive sur $\Omega \times S^{d-1}$ telles que le résultat suivant est vrai : si $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ vérifient :*

- a est homogène en ξ d'ordre 0 pour $|\xi| \geq 1/2$,
- pour certain compact $K \subset \Omega$ on a $\text{supp } a \subset K \times \mathbb{R}^d$ et $\chi = 1$ sur K ,

alors

$$(21.5.1) \quad (\text{Op}(a)(\chi u_{\theta(n)}), \chi u_{\theta(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times S^{d-1}} a(x, \xi) d\mu(x, \xi).$$

Définition 21.2. *On dit que μ est la mesure microlocale de défaut de $(u_{\theta(n)})$.*

8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L_{loc}^2(\Omega)$ et admettant une mesure microlocale de défaut μ . Considérons un opérateur différentiel d'ordre m , $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ avec $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$. On note $p_m = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$ le symbole principal de P . Supposons que, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, la suite $\chi P(u_n)$ converge fortement vers 0 dans $H^{-m}(\mathbb{R}^d)$. En déduire que

$$\text{supp } \mu \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times S^{d-1}; p_m(x, \xi) = 0\}.$$

Indication : écrire $\|\chi P u_n\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^d)}^2$ sous la forme $(\text{Op}(a)(\chi' u_n), \chi' u_n)$.

9. (difficile) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers 0 dans $L_{loc}^2(\Omega)$ et admettant une mesure microlocale de défaut μ . Considérons un opérateur différentiel d'ordre m , $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ avec $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$. On suppose de plus que $P^* = P$ et que, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, la suite $\chi P(u_n)$ converge vers 0 fortement dans $H^{1-m}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que, pour toute fonction $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ homogène d'ordre $1 - m$ en ξ pour $|\xi| \geq 1/2$ et à support compact en x , on a

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a, p_m\}(x, \xi) d\mu(x, \xi) = 0.$$

Indication : introduire χ telle que $\chi a = a$.

Chapitre 22

Problèmes sur la théorie de De Giorgi-Nash-Moser

22.1 Théorème de Nash

Fixons $T > 0$ et $R > 0$. On note B_R la boule de centre 0 et de rayon R , et on pose $Q = [0, T] \times \Omega$. Considérons l'opérateur

$$L = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \partial_{x_j} (a_{jk} \partial_{x_k} \cdot)$$

où les coefficients a_{jk} vérifient $a_{jk} = a_{kj}$ et $a_{jk} \in L^\infty(B_R)$ pour tout $1 \leq j, k \leq n$. On suppose de plus qu'il existe deux constantes $\lambda, \Lambda > 0$ telles que

$$\lambda \sum_{1 \leq j \leq n} \xi_j^2 \leq \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \leq \Lambda \sum_{1 \leq j \leq n} \xi_j^2$$

pour tout ξ dans \mathbb{R}^n et presque tout $x \in B_R$.

Nous avons étudié en cours la régularité des solutions de l'équation elliptique $Lu = 0$ et démontré en particulier le théorème de De Giorgi. Le but de ce problème est de démontrer le théorème de Nash qui concerne les solutions $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation parabolique

$$\partial_t u - Lu = 0.$$

Dans ce problème on ne montrera que des estimations *a priori* : on démontre des estimations pour des fonctions régulières ; l'obtention de ces estimations pour des fonctions moins régulières ne sera pas demandée.

1. Soit $v = v(t, x)$ une fonction appartenant à $C^2(Q)$. On dit que v est une sous-solution de $\partial_t - L$ si $(\partial_t - L)v \leq 0$.

Soit $\kappa \in [1, +\infty[$ et $v = v(t, x)$ une fonction positive appartenant à $C^2(Q)$. Montrer que si v est une sous-solution de $\partial_t - L$ alors v^κ est aussi une sous-solution.

2. Considérons deux fonctions $V = (V_1, \dots, V_n)(t, x)$ et $W = (W_1, \dots, W_n)(t, x)$. On note $\langle V, W \rangle$ la fonction définie par

$$\langle V, W \rangle(t, x) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{jk}(x) V_j(t, x) W_k(t, x).$$

On note $\|V\|$ la fonction $\sqrt{\langle V, V \rangle}$. Montrer que $\langle V, W \rangle \leq \|V\| \|W\|$.

Soit $v \in C^2(Q)$. Supposons que $w \in C^2(Q)$ s'annule au voisinage de $[0, T] \times \partial\Omega$. Montrer que

$$\iint_Q w(\partial_t - L)v \, dx \, dt = \iint_Q \langle \nabla_x v, \nabla_x w \rangle \, dx \, dt + \iint_Q w \partial_t v \, dx \, dt.$$

Posons $g = (\partial_t v - Lv)$ et considérons une fonction $\psi \in C^\infty(Q)$ qui s'annule au voisinage de $[0, T] \times \partial\Omega$. En utilisant l'identité précédente (appliquée avec w choisie convenablement), montrer que pour tout $(T_1, T_2) \in [0, T]^2$,

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \psi^2 \|\nabla_x v\|^2 \, dx \, dt \\ &= -2 \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \langle \psi \nabla_x v, v \nabla_x \psi \rangle \, dx \, dt + \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \psi^2 g v \, dx \, dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} (\partial_t \psi^2) v^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi^2 v^2(T_2, x) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi^2 v^2(T_1, x) \, dx. \end{aligned}$$

En déduire

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \psi^2 \|\nabla_x v\|^2 \, dx \, dt + \int_{\Omega} \psi^2 v^2(T_2, x) \, dx \\ & \leq \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} v^2 (4 \|\nabla_x \psi\|^2 + \partial_t \psi^2) \, dx \, dt + 2 \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \psi^2 g v \, dx \, dt + \int_{\Omega} \psi^2 v^2(T_1, x) \, dx. \end{aligned}$$

(Indication : $2xy \leq \frac{1}{2}x^2 + 2y^2$.)

3. Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, & T_{j+1} &\geq T_j, & T_{j+1} - T_j &= A j^{-2} T, & \lim T_j &= T/2, \\ R_0 &= R, & R_{j+1} &\leq R_j, & R_j - R_{j+1} &= B j^{-2} R, & \lim R_j &= R/2. \end{aligned}$$

avec $A, B > 0$ deux constantes données. On pose $Q_j = [T_j, T] \times B_{R_j}$. Noter que $Q_{j+1} \subset Q_j$ (faire un dessin en dimension 1.)

Soit $v \in C^2(Q)$ une sous-solution positive de $\partial_t - L$. Montrer que

$$\|\nabla_x v\|_{L^2(Q_{j+1})} + \sup_{t \in [T_{j+1}, T]} \|v(t, \cdot)\|_{L^2(B_{R_{j+1}})} \leq C_j \|v\|_{L^2(Q_j)},$$

où la constante C_j vérifie $C_j \leq C j^2 + C$ avec C indépendante de j .

4. Fixons $\kappa = 1 + \frac{2}{n}$.

— Soit $R/2 \leq r \leq R$ et B_r la boule de centre 0 et de rayon r . Soit $w = w(x)$ appartenant à $H^1(B_r)$. On admet qu'il existe une constante $\gamma = \gamma(R)$ telle que

$$\|w\|_{L^{2\kappa}(B_r)}^{2\kappa} \leq \gamma \|\nabla_x w\|_{L^2(B_r)}^2 \|w\|_{L^2(B_r)}^{4/n} + \gamma \|w\|_{L^2(B_r)}^{2\kappa}.$$

(Expliquer pourquoi si vous savez démontrer cette inégalité.)

— Montrer qu'il existe une constante γ telle que,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \|v^\kappa\|_{L^2(Q_j)}^2 \leq \gamma \sigma_j(v)^{4/n} \|\nabla_x v\|_{L^2(Q_j)}^2 + \gamma \|v\|_{L^2(Q_j)}^{2\kappa},$$

où

$$\sigma_j(v) = \sup_{t \in [T_j, T]} \|v(t, \cdot)\|_{L^2(B_{R_j})}^2.$$

5. Soit $v \in C^2(Q)$ une sous-solution positive de $\partial_t - L$. Montrer que

$$\|v^\kappa\|_{L^2(Q_{j+1})}^2 \leq \gamma(C_j^{2\kappa} + 1) \|v\|_{L^2(Q_j)}^{2\kappa}.$$

6. En déduire qu'il existe $K > 0$ telle que, pour tout $v \in C^2(Q)$ sous-solution positive de $\partial_t - L$, on ait

$$\|v\|_{L^\infty(Q')} \leq K \|v\|_{L^2(Q)}$$

où $Q' = [T/2, T] \times B_{R/2}$.

22.2 Fonctions propres du Laplacien

Dans tout cet exercice on ne considère que des fonctions à valeurs réelles.

Préliminaires

Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 3$.

1. En exploitant l'injection de Sobolev, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |f|^{2(1+2/n)} dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{2/n}.$$

2. Rappelons que pour toute fonction $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est C^1 , bornée ainsi que sa dérivée, et pour tout $f \in H^1(\Omega)$, on a

$$G(f) \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla G(f) = G'(f) \nabla f.$$

En déduire directement que :

(i) pour tout $p \in]1, +\infty[$, si $f \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, alors

$$|f|^p \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad |\nabla |f|^p| = p |f|^{p-1} |\nabla f|.$$

(ii) pour tout $p \in [1, +\infty[$, si $f \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, alors la fonction $f |f|^{2p-2}$ appartient aussi à $H^1(\Omega)$ et

$$\nabla(f |f|^{2p-2}) = (2p-1) |f|^{2p-2} \nabla f.$$

On admet que si de plus $f \in H_0^1(\Omega)$, alors $f |f|^{2p-2} \in H_0^1(\Omega)$.

Application aux fonctions propres du Laplacien

Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) et $\lambda \geq 0$. On souhaite étudier les solutions de

$$(22.2.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On considère une fonction $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ qui est solution faible de (22.2.1), ce qui implique que

$$(22.2.2) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} uv \, dx.$$

3. Montrer que

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Plus généralement en utilisant le résultat démontré à la question 2, montrer que

$$\forall p \in]1, +\infty[, \quad \lambda \int_{\Omega} |u|^{2p} \, dx = \frac{2p-1}{p^2} \int_{\Omega} |\nabla |u|^p|^2 \, dx.$$

4. Montrer qu'il existe une constante A telle que, pour tout $\lambda \geq 0$, tout $p \in [1, +\infty[$ et toute solution faible $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |u|^{2p(1+2/n)} \, dx \leq Ap\lambda \left(\int_{\Omega} |u|^{2p} \, dx \right)^{1+2/n}.$$

5. (*) En combinant ce qui précède à un argument itératif similaire à celui de Moser, montrer qu'il existe une constante K (indépendante de λ et u), telle que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq K\lambda^{n/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Il s'agit d'estimer $\|u\|_{L^{2p_k}(\Omega)}$ pour une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convenable telle que $\sum_{\mathbb{N}} p_k^{-1} = \frac{n}{2}$.

Sixième partie

Bibliographie

Ces notes de cours sont très fortement inspirées par les livres dans lesquels j'ai étudié l'Analyse en tant qu'étudiant, dans l'ordre chronologique suivant :

1. Haim Brézis. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*. 1999. Dunod, Paris.
2. Claude Zuily. *Problèmes de distributions avec solutions détaillées*. Hermann 1978.
3. Michael Taylor. *Pseudodifferential operators and nonlinear PDE*. *Progress in Mathematics*, 100. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991. 213 pp.
4. Patrick Gérard et Serge Alinhac. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Inter-Éditions et Éditions du CNRS, Paris (1991).
5. Xavier Saint Raymond. *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*. *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991. viii+108 pp.
6. Elias Stein. *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Vol. 43. Princeton University Press.

En particulier, le choix de parler de calcul pseudo-différentiel, d'analyse harmonique, d'équations hyperboliques et du théorème de Giorgi est directement inspiré du livre de Michael Taylor. En un certain sens, ce cours détaille à peine l'introduction de son livre. Je recommande très fortement sa lecture et en particulier la partie sur le calcul para-différentiel que j'aurais aimé aborder dans ces notes. Michael Taylor a également écrit une encyclopédie très agréable à lire sur les équations aux dérivées partielles. Le livre de Patrick Gérard et Serge Alinhac ainsi que celui de Xavier Saint-Raymond ont également permis à beaucoup d'étudiants de se former à l'analyse microlocale. Il y a en effet peu de livres aussi clairs et accessibles à un débutant dans ce domaine.

J'ai utilisé de nombreux autres documents pour préparer ce cours. J'ai essayé de les citer tous ci-dessous.

Analyse fonctionnelle

1. Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Ellipses
2. Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011. xiv+599 pp.
3. Claude Zuily. *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Cassini.
4. Laure Saint-Raymond. *Notes du cours d'analyse fonctionnelle à l'ENS*.

5. Didier Robert. Cours d'Analyse fonctionnelle. Notes d'un cours à l'Université de Nantes.
6. F. Golse, Y. Laszlo, F. Pacard et C. Viterbo. Analyse réelle et complexe. Cours à l'école Polytechnique.
7. Christensen, Ole. An introduction to frames and Riesz bases. Vol. 7. Boston : Birkhäuser, 2003.
8. Lawrence C. Evans and Te Zhang. "Weak convergence and averaging for ODE." *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 138 (2016) : 83-92.

Voici deux références qui donnent une perspective historique très intéressante sur l'introduction des principaux concepts d'Analyse fonctionnelle.

1. Gilles Godefroy. Article sur le lemme de Baire.
2. N.P. Landsman. *Lecture Notes on Hilbert Spaces and Quantum Mechanics*.

Analyse harmonique

1. Elias Stein. *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Vol. 43. Princeton University Press.
2. Russell Brown. *Lecture notes : harmonic analysis*. University of Kentucky.
3. Terence Tao. Notes de cours disponibles sur sa page internet.
4. Camil Muscalu and Wilhelm Schlag. *Classical and multilinear harmonic analysis*. Vol. 1. Cambridge University Press, 2013.
5. Elliot Lieb and Michael Loss. "Analysis, volume 14 of graduate studies in mathematics." American Mathematical Society, Providence, RI, 4 (2001).

Analyse microlocale

1. Serge Alinhac et Patrick Gérard. *Pseudo-differential operators and the Nash-Moser theorem*. Translated from the 1991 French original by Stephen S. Wilson. *Graduate Studies in Mathematics*, 82. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. viii+168 pp.
2. Xavier Saint Raymond. *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*. *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991. viii+108 pp.

3. Michael Taylor. Pseudodifferential operators and nonlinear PDE. Progress in Mathematics, 100. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991. 213 pp.
4. Nicolas Lerner. Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators. Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications, 3. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. xii+397 pp.
5. Lars Hörmander. The analysis of linear partial differential operators. III, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 274, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Pseudodifferential operators.
6. Elias Stein. Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. xiv+695 pp.
7. I.L. Hwang. The L^2 -boundedness of pseudodifferential operators. Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), no. 1, 55–76.
8. Joseph Kohn and Luis Nirenberg, An algebra of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 269–305
9. Alberto-P. Calderón et Rémi Vaillancourt. On the boundedness of pseudo-differential operators. J. Math. Soc. Japan 23 1971 374–378.
10. Lars Hörmander. Oscillatory integrals and multipliers on FL^p . Arkiv för Matematik 11.1 (1973) : 1-11.
11. Jacques Chazarain et Alain Piriou. Introduction to the theory of linear partial differential equations. Translated from the French. Studies in Mathematics and its Applications, 14. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982. xiv+559 pp.

Problèmes elliptiques

Articles originaux :

1. Ennio De Giorgi. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. (Italian) Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 1957 25–43.
2. John Nash. Parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 43 (1957), 754–758.
3. Jürgen Moser,. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 13 1960 457–468.

Livres et notes de cours :

1. Jürgen Jost. Partial differential equations. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 214. Springer, New York, 2013. xiv+410 pp.
2. Michael Taylor. Pseudodifferential operators and nonlinear PDE. Progress in Mathematics, 100. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991. 213 pp.
3. Luigi Ambrosio. Lecture Notes on Elliptic Partial Differential Equations.
4. Didier Smets. Notes d'un cours de DEA.
5. Qing Han et Fanghua Lin. Elliptic partial differential equations. Second edition. Courant Lecture Notes in Mathematics, 1. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. x+147 pp.

Equations dispersives

1. Terence Tao. Nonlinear dispersive equations : local and global analysis. Vol. 106. American Mathematical Soc., 2006.
2. Raphaël Danchin et Pierre Raphaël. Solitons, dispersion et explosion : une introduction à l'étude des ondes non linéaires. Notes de cours.
3. Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin and Raphaël Danchin. Fourier analysis and nonlinear partial differential equations. Vol. 343. Springer Science & Business Media, 2011.

Problèmes inverses

1. Gunther Uhlmann. The Dirichlet to Neumann map and inverse problems. Notes de cours.
2. Peter Hähner. A periodic Faddeev-type solution operator. J. Differential Equations 128 (1996), no. 1, 300–308.
3. John Sylvester and Gunther Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. Ann. of Math. (2) 125 (1987), no. 1, 153–169.
4. Mikko Salo. Calderón problem. Notes de cours 2008.